



TUGAS AKHIR - SM 141501

ANALISIS BIFURKASI PADA MODEL EPIDEMIOLOGI SEIR DEMAM BERDARAH DI SURABAYA

**DESY KUSUMA NINGSIH
1211 100 018**

Dosen Pembimbing
Dr. Hariyanto, M.Si
Drs. M. Setijo Winarko, M.Si

**JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016**



FINAL PROJECT - SM 141501

BIFURCATION ANALYSIS ON EPIDEMIOLOGICAL SEIR MODEL OF DENGUE IN SURABAYA

DESY KUSUMA NINGSIH
1211 100 018

Supervisor
Dr. Hariyanto, M.Si
Drs. M. Setijo Winarko, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Science
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2016

LEMBAR PENGESAHAN

ANALISIS BIFURKASI PADA MODEL EPIDEMIOLOGI SEIR DEMAM BERDARAH DI SURABAYA

BIFURCATION ANALYSIS ON EPIDEMIOLOGICAL SEIR MODEL OF DENGUE IN SURABAYA

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Pada bidang studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh :
DESY KUSUMA NINGSIH
NRP. 1211 100 018

Menyetujui,

Pembimbing II



Drs. M. Setijo Winarko, M.Si

NIP. 19640920199002 1 002

Pembimbing I



Dr. Hariyanto, M.Si

NIP. 19530414 198203 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika FMIPA ITS



Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT

NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, Februari 2016

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah memberikan limpahan nikmat, karunia, dan petunjuk-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul:

“Analisis Bifurkasi pada Model Epidemiologi SEIR Demam Berdarah di Surabaya”

yang merupakan salah satu persyaratan akademis dalam menyelesaikan Program Studi S-1 pada Jurusan Matematika Fakultas MIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik dan lancar berkat kerja sama, bantuan, dan dukungan dari banyak pihak. Sehubungan dengan hal itu, penulis bermaksud menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si MT selaku Ketua Jurusan yang memberikan motivasi dan kemudahan pengurusan persyaratan-persyaratan selama penulis menyelesaikan Tugas Akhir ini.
2. Bapak Dr. Hariyanto, M.Si dan Bapak Drs. M. Setijo Winarko, M.Si selaku Dosen Pembimbing yang senantiasa meluangkan waktunya guna memberikan dukungan, motivasi, arahan dan saran yang bermanfaat dalam penyusunan Tugas Akhir ini.
3. Bapak Drs. Suhud, M.Si, Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si, dan Bapak Kistosil Fahim, S.Si, M.Si selaku dosen penguji yang telah memberikan arahan berupa kritik dan saran yang bersifat membangun demi kesempurnaan Tugas Akhir ini.
4. Bapak Dr. Choirul Imron, MI.Komp selaku Kaprodi S1 Jurusan Matematika ITS yang telah memberi dukungan dan kemudahan pengurusan persyaratan-persyaratan selama penulis menyelesaikan Tugas Akhir ini.

5. Ibu Dra. Farida Agustini Widjajati, M.Si selaku dosen wali yang telah memberi dukungan dan kemudahan dalam pengurusan permasalahan akademik selama ini.
6. Ibu Putri selaku pembimbing dari Dinas Kesehatan kota Surabaya yang senantiasa memberikan pengarahan dalam pengambilan data penelitian.
7. Seluruh keluarga besar Jurusan Matematika yang telah memberikan dukungan dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik dari pembaca. Akhir kata, semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan.

Surabaya, Februari 2016

Penulis

special thank's to

Selama proses pembuatan Tugas Akhir ini, banyak pihak yang telah memberikan bantuan dan dukungannya terhadap penulis. Rasanya tidak akan puas hati penulis jika belum mengucapkan terima kasih secara khusus dan apresiasi yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak dan Ibu tercinta yang senantiasa ikhlas memberikan semangat, doa, dan nasihat-nasihat yang tidak akan pernah penulis lupakan.
2. Nenek, Adek Sinta dan Adek Diah yang telah memberikan doa dan dukungan kepada penulis.
3. Teman - temaku Ainur, Yessy, Ita, Tutut, Farah, Ifah, Huri, Ilmi, Kitin, Sesti, Yulia, Mbak Devi, Eni dan Mas Henda yang telah memberikan doa, dukungan dan motivasi selama masa-masa sulit penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini. Semoga kelak dapat menggapai impian kita.
4. Teman seperjuangan, Hilmi, Uus, Lisna, Ana, Dwi Afifah, Isman, Heni, Wanda, Dita, Angga, dan Reza yang telah memberikan doa, bantuan dan semangat kepada penulis.
5. Yahya, Zaki, Haqqul, Kak Dona, Hasna, Devi, Habib, Singgih, Mas Satria, dan Mas Ipin yang telah membantu menyelesaikan Tugas Akhir ini.
6. Teman-teman angkatan 2011 dan 2012, terima kasih atas doa dan dukungan kalian selama ini.

Tentu saja masih banyak pihak lain yang turut andil dalam penyelesaian tugas akhir ini yang tidak bisa penulis sebutkan satu-satu. Semoga Allah membalas dengan balasan yang berlebih bagi pihak-pihak yang membantu penulis. *Amin ya rabbal ,alamin.*



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
<i>ABSTRACT</i>	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR TABEL	xxi
DAFTAR SIMBOL	xxiii
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	3
1.5 Manfaat	4
1.6 Sistematika Penulisan	4
 BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Penelitian Terdahulu	7
2.2 Penyakit Demam Berdarah	8
2.3 Bilangan Reproduksi Dasar	8
2.4 Kestabilan Titik Tetap	11
2.5 Stabil Asimtotik Lokal	13
2.6 Kriteria Routh-Hurwitz	13
2.7 Metode Runge-Kutta	14
2.8 Bifurkasi	15

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Studi Literatur	17
3.2 Tahap Mengkaji Model Interaksi Dinamis	17
3.3 Mencari Titik Keseimbangan.....	17
3.3.1 Mencari Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	17
3.3.2 Mencari Titik Keseimbangan Endemik	18
3.4 Menentukan Bilangan Reproduksi Dasar	18
3.5 Menganalisis Kestabilan Titik Keseimbangan.....	18
3.6 Menyelidiki Terjadinya Bifurkasi.....	18
3.7 Membuat Simulasi	18
3.8 Kesimpulan dan Saran	19
3.9 Diagram Alir	19

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

4.1 Konstruksi Model Epidemiologi SEIR pada Demam Berdarah	21
4.2 Daerah Penyelesaian	27
4.3 Titik Keseimbangan	30
4.3.1 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	30
4.3.2 Titik Keseimbangan Endemik	33
4.4 Kestabilan Lokal Model Interaksi Dinamis	42
4.4.1 Kestabilan Lokal Titik Setimbang Bebas Penyakit.....	49
4.4.2 Kestabilan Lokal Titik Setimbang Endemik	55
4.5 Menentukan Bilangan Reproduksi Dasar	64
4.6 Analisis Bifurkasi.....	69
4.7 Simulasi dan Numerik.....	72

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan	85
----------------------	----

5.2 Saran	87
-----------------	----

DAFTAR PUSTAKA	89
----------------------	----

LAMPIRAN

A. Listing Program Kestabilan Titik Keseimbangan ..	91
---	----

B. Listing Program Bifurkasi	93
------------------------------------	----

C. Data Jumlah Penderita dan Kematian DBD di Surabaya	101
--	-----

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Bifurkasi Maju.....	15
Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian.....	20
Gambar 4.1 Kurva Bifurkasi.....	72
Gambar 4.2 Grafik Kestabilan Populasi Manusia saat $\mathcal{R}_0 = 1, N_h = 100, h = 0.01$	82
Gambar 4.3 Grafik Kestabilan Populasi Nyamuk saat $\mathcal{R}_0 = 1, N_h = 100, h = 0.01$	83



DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 4.1 Routh-Hurwitz Bebas Penyakit.....	51
Tabel 4.2 Routh-Hurwitz Endemik.....	58
Tabel 4.3 Nilai Awal Parameter.....	80
Tabel 4.4 Nilai Awal dari masing – masing Subpopulasi	81
Tabel A1 Data jumlah penderita dan kematian DBD Tahun 2011.....	101
Tabel A2 Data jumlah penderita dan kematian DBD Tahun 2012.....	103
Tabel A3 Data jumlah penderita dan kematian DBD Tahun 2013.....	105
Tabel A4 Data jumlah penderita dan kematian DBD Tahun 2014.....	107

DAFTAR SIMBOL

S_h	=	populasi <i>susceptible</i> yaitu kelompok individu yang rentan terhadap penyakit
E_h	=	populasi <i>exposed</i> yaitu kelompok individu yang terkena virus namun tidak tampak tanda penyakitnya
I_h	=	populasi <i>infected</i> yaitu kelompok individu yang terinfeksi virus demam berdarah
R_h	=	populasi <i>recovered</i> yaitu individu yang telah sembuh
A_m	=	populasi <i>aquase phase</i> yaitu kelompok nyamuk dalam fase akuatik meliputi telur, larva, dan tahap pupa
S_m	=	populasi <i>susceptible</i> yaitu kelompok nyamuk yang rentan penyakit demam berdarah
I_m	=	populasi <i>infected</i> yaitu kelompok nyamuk yang terinfeksi
N_h	=	banyaknya populasi individu
N_m	=	banyaknya populasi nyamuk
μ_h	=	jumlah kematian alami dari populasi individu
μ_m	=	angka kematian alami dari populasi nyamuk
μ_h^*	=	jumlah kelahiran dari populasi individu
B	=	rata – rata harian gigitan nyamuk (per hari)
β_h	=	laju penularan melalui gigitan nyamuk yang terinfeksi
β_m	=	laju penularan dari individu terinfeksi yang digigit oleh nyamuk
p	=	nilai persentase nyamuk terinfeksi
γ_h	=	laju proporsi individu yang terjangkit infeksi virus demam berdarah
η_h	=	laju individu terinfeksi penyakit demam berdarah yang akan sembuh karena dilakukan treatment
η_m	=	laju pertumbuhan larva menjadi dewasa
φ	=	banyaknya telur – telur pada masing – masing deposit per kapita
k	=	banyaknya larva per individu

\mathcal{R}_0 = bilangan reproduksi dasar
 \mathcal{F} = laju kemunculan infeksi baru
 \mathcal{V}^+ = laju perpindahan individu yang masuk
 \mathcal{V}^- = laju perpindahan individu yang keluar
 E_0 = titik kesetimbangan bebas penyakit
 E_0^* = titik kesetimbangan endemik
 J = matriks Jacobian
 λ = nilai eigen

BAB I

PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan tentang hal – hal yang menjadi latar belakang munculnya permasalahan dalam Tugas Akhir. Selanjutnya disusun rumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat yang diperoleh serta sistematika penulisan dari Tugas Akhir ini.

1.1 Latar Belakang

Setiap tahun penyebaran penyakit Demam Berdarah *Dengue* (DBD) semakin bertambah dengan jumlah kasus yang cukup banyak. Demam Berdarah *Dengue* (DBD) merupakan salah satu penyakit berbahaya yang dapat menyebabkan kematian. Penyakit ini disebabkan oleh virus *dengue* dan hanya dapat menular melalui gigitan nyamuk, oleh karena itu penyakit ini termasuk kelompok *Anthropod Borne Diseases*. Virus *dengue* dibawa oleh *vector*, yaitu nyamuk *Aedes Aegypti* dan nyamuk *Aedes Albopictus*. Namun, *vector* utama pembawa virus *dengue* adalah nyamuk *Aedes Aegypti*. Virus merupakan parasit berukuran mikroskopik yang tidak memiliki perlengkapan selular untuk bereproduksi sendiri, sehingga virus mencari sel inang untuk melangsungkan hidup. Ketika virus mendapatkan sel inang untuk melangsungkan hidup, virus akan bereproduksi dan menghasilkan virus-virus baru [1].

Negara Indonesia berada di urutan kedua setelah Thailand , bahkan hingga pertengahan Februari 2009 terdapat 8,386 orang terinfeksi penyakit DBD di seluruh Indonesia dengan kematian mencapai 169 orang [2]. Di Indonesia, penyakit DBD pertama kali ditemukan di Surabaya pada tahun 1968, dengan kasus 58 orang anak, 24 diantaranya meninggal (*Case Fatality Rate/ CFR* = 41,3%). Sejak itu, DBD menunjukkan kecenderungan peningkatan jumlah kasus dan luas daerahjangkitnya. Berbagai upaya

telah dilakukan untuk mengatasi permasalahan ini, baik dari kalangan masyarakat maupun pemerintah, namun angka terjangkitnya penyakit DBD masih belum dapat ditekan secara efektif. Hal ini diduga terjadi karena kurangnya informasi mengenai tempat, waktu dan lokasi penyebaran penyakit DBD di Kota Surabaya. Oleh karena itu perlu dilakukan kegiatan surveilans penyakit DBD. Kegiatan surveilans yang meliputi proses pengumpulan, pengolahan, analisis, interpretasi, dan distribusi data penyakit yang dilakukan secara sistematis dan terus – menerus disebut surveilans epidemiologi. Pengembangan sistem surveilans epidemiologi umumnya bertujuan untuk memantau kecenderungan perubahan dalam intervensi, deteksi dan prediksi Kejadian Luar Biasa (KLB), evaluasi program pencegahan dan proyeksi pelayanan kesehatan. Data surveilans epidemiologi yang dihasilkan, sebagian masih diolah secara manual dengan penyajian terbatas dalam bentuk tabel dan grafik [3].

Matematika memberikan salah satu solusi penyelesaian penyebaran penyakit demam berdarah dengan memodelkan penyebaran penyakit ke dalam bentuk matematis menggunakan tipe model SEIR. Model SEIR (*Susceptibles, Exposed, Infected, Recovered*) pada awalnya dikembangkan untuk mengetahui laju penyebaran dan kepunahan suatu wabah penyakit dalam populasi dan bersifat endemik.

Dalam penelitian Tugas Akhir ini akan dilakukan analisis pada model penyakit demam berdarah dengan menyelidiki adanya kestabilan dari setiap titik endemik, titik bebas penyakit dan menentukan bilangan reproduksi (R_0) untuk model penyakit demam berdarah serta menganalisis

bifurkasi. Selanjutnya merumuskan penyelesaian numerik dari model epidemiologi tersebut dan akan disimulasikan.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas pada Tugas Akhir ini dapat dirumuskan sebagai berikut :

1. Bagaimana memodelkan epidemiologi demam berdarah?
2. Bagaimana menentukan kestabilan dari setiap titik kesetimbangan endemik, titik kesetimbangan bebas penyakit dan bilangan reproduksi (\mathcal{R}_0) untuk model demam berdarah?
3. Bagaimana menganalisis terjadinya bifurkasi pada model penyakit demam berdarah di Surabaya?
4. Bagaimana hasil simulasi model epidemiologi berdasarkan analisis yang diperoleh?

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas pada penelitian Tugas Akhir ini akan dibatasi pada model epidemiologi demam berdarah tipe SEIR pada kelompok manusia, dengan S adalah individu yang rentan penyakit (*Susceptible*), E adalah individu terjangkit dan dapat menularkan penyakit tetapi belum menunjukkan gejala awal, I adalah individu terinfeksi (*Infected*), dan R adalah individu yang telah sembuh (*Recovered*). Sedangkan pada kelompok nyamuk tipe model ASI, dengan A adalah fase akuatik meliputi telur, larva dan tahap pupa, S adalah nyamuk yang rentan penyakit, dan I adalah nyamuk yang terinfeksi penyakit.

1.4 Tujuan

Tujuan yang ingin dicapai dalam Tugas Akhir ini adalah :

1. Membuat model epidemiologi demam berdarah.
2. Menentukan kestabilan dari setiap titik kesetimbangan endemik dan titik kesetimbangan bebas penyakit serta

bilangan reproduksi (\mathcal{R}_0) untuk model epidemiologi demam berdarah.

3. Menganalisis terjadinya bifurkasi pada penyakit demam berdarah di Surabaya.
4. Mensimulasikan model epidemiologi berdasarkan analisis yang dilakukan.

1.5 Manfaat

Penelitian pada Tugas Akhir ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut :

1. Membantu menentukan daerah yang menjadi titik rawan terjangkitnya penyakit demam berdarah.
2. Memperoleh pengetahuan dalam menginterpretasikan hasil analisis dan simulasi pada model penyakit demam berdarah
3. Dapat dijadikan sebagai rujukan tentang penyakit demam berdarah pada perkembangan ilmu matematika.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan laporan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab. Adapun sistematika penulisan dalam laporan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut.

1. BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi latar belakang permasalahan, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat penulisan serta sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini memaparkan dasar teori dasar yang digunakan penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir, antara lain bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0), kestabilan titik tetap, stabil asimtotik lokal, bifurkasi.

3. BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini menjelaskan alur kerja dan metode yang digunakan penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir.

4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Bab ini menyajikan analisis kestabilan lokal dari model epidemiologi tipe SEIR pada kelompok populasi individu dan model epidemi tipe ASI pada kelompok nyamuk, analisis bifurkasi dari bilangan reproduksi dasar yang telah diperoleh, mencari solusi numerik dengan metode Runge-Kutta, simulasi numerik dari model, dan pengaruh parameter jumlah kasus β_h dan jumlah laju individu yang sembuh η_h pada kurva bifurkasi.

5. BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan dan saran dari penulis mengenai analisis kestabilan lokal dan analisis bifurkasi dari model epidemiologi tipe SEIR.

6. LAMPIRAN



BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini akan dibahas mengenai penelitian terdahulu, penyakit demam berdarah, dan dasar teori yang digunakan dalam penyusunan Tugas Akhir ini. Dasar teori yang akan dijelaskan dibagi menjadi beberapa subbab, yaitu bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0), kestabilan titik tetap, stabil asimtotik lokal, bifurkasi, dan metode runge-kutta.

2.1 Penelitian Terdahulu

Pada penelitian terdahulu Noorani M. S. M (2012) menganalisis model SEIR penyebaran demam berdarah di daerah Selangor Malaysia, dengan SEIR menggambarkan individu yang rentan penyakit demam berdarah (*Susceptible*), individu yang terjangkit dan dapat menularkan penyakit tetapi tidak menunjukkan gejala awal (*Exposed*), individu penginfeksi penyakit demam berdarah (*Infected*), individu yang sembuh dari penyakit demam berdarah (*Recovered*) [4]. Pada penelitian model tipe SEIR, infeksi demam berdarah pada manusia di Selangor tidak berbahaya berdasarkan data yang sudah diolah. Penelitian lain membahas tentang menganalisis sensitifitas model epidemiologi bertipe SIR yang menggambarkan penyebaran penyakit diantara individu sehat yang rentan penyakit (*Susceptible*), individu penginfeksi penyakit demam berdarah (*Infected*), individu yang sembuh dari penyakit demam berdarah oleh Helena Sofia Rodrigues (2013) [5]. Model epidemiologi tipe SIR tersebut telah dilakukan identifikasi kekuatan model prediksi terhadap nilai-nilai parameter dan pengaruh pada masing-masing bilangan reproduksi dasar.

Pada Tugas Akhir ini akan membahas model epidemiologi SEIR demam berdarah, dengan mengkonstruksi dari model penelitian Noorani M. S. M [4] dan model penelitian Helena Sofia Rodrigues [5] yang menggambarkan SEIR dengan individu yang rentan penyakit demam berdarah (*Susceptible*), individu yang terjangkit dan dapat menularkan penyakit tetapi tidak

menunjukkan gejala awal (*Exposed*), individu yang terinfeksi penyakit demam berdarah (*Infected*), individu yang telah sembuh dari penyakit demam berdarah (*Recovered*). Sedangkan kelompok nyamuk dinyatakan dengan nyamuk pada tahap aquatik (*Aquatic phase*), nyamuk yang rentan (*Susceptible*) dan nyamuk penginfeksi demam berdarah (*Infected*).

2.2 Penyakit Demam Berdarah

Demam Berdarah *Dengue* (DBD) merupakan suatu penyakit endemik yang disebabkan oleh virus yang ditransmisikan oleh *Aedes aegypti* dan *Aedes albopictus*. Penderita yang terinfeksi akan memiliki gejala berupa demam ringan sampai tinggi, disertai dengan sakit kepala, nyeri pada mata, otot dan persendian, hingga pendarahan spontan. Demam berdarah disebabkan oleh virus. Virus disebarkan melalui gigitan nyamuk *Aedes aegypti* yang telah terjangkit virus *dengue*. Nyamuk *Aedes albopictus* juga merupakan nyamuk yang menyebarkan virus *dengue*, namun nyamuk *Aedes aegypti* tetap merupakan vektor utama yang menyebabkan terjangkitnya virus demam berdarah *dengue* di Asia Tenggara terutama di wilayah Indonesia.

Teori klasik metode diagnostik membagi infeksi virus *dengue* menjadi 2 kategori umum, yaitu *Asymptomatic dengue infection* atau *dengue without symptoms* dan *symptomatic dengue*. Infeksi virus *dengue* dengan gejala *symptomatic dengue* dibagi menjadi 3 kelompok yaitu Demam Berdarah *Dengue* (DBD) tanpa gejala spesifik, Demam Berdarah *Dengue* (DBD) dengan demam di tambah 2 gejala spesifik yakni pendarahan dan tanpa pendarahan, dan Demam Berdarah *Dengue* (DBD) dengan atau tanpa *shock syndrome*[6].

2.3 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) didefinisikan sebagai bilangan yang menunjukkan banyaknya infeksi baru yang

disebabkan oleh individu terinfeksi selama individu tersebut hidup sebagai individu yang terinfeksi[7].

- Jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka setiap individu yang terinfeksi memproduksi kurang dari satu individu terinfeksi baru, dengan kata lain dapat diprediksi bahwa infeksi akan bersih dari populasi.
- Jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka individu yang terinfeksi memproduksi lebih dari satu individu terinfeksi baru. Dalam keadaan endemi, dapat ditentukan suatu tindakan pengendalian dan besarnya nilai parameter yang tepat, sehingga $\mathcal{R}_0 < 1$.
- Jika $\mathcal{R}_0 = 1$ maka terjadi bifurkasi yang dapat didefinisikan sebagai perubahan stabilitas dan banyaknya titik kesetimbangan yang diakibatkan oleh perubahan parameter, dan $\mathcal{R}_0 = 1$ disebut titik bifurkasi dimana fenomena sebuah sistem terbagi kedalam dua kemungkinan perilaku akibat perubahan parameter.

Diasumsikan populasi dapat dikelompokkan ke dalam n kompartemen. Diberikan $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ dengan $x_i \geq 0$, dimana x_i adalah banyaknya individu pada masing-masing kompartemen. Kemudian diberikan X_S adalah himpunan dari semua titik kesetimbangan bebas penyakit dan didefinisikan sebagai berikut $X_S = \{x_j \geq 0 | x_i = 0, i = 1, \dots, m\}$

dengan m adalah banyaknya kompartemen yang terdapat individu terinfeksi. Untuk menghitung nilai dari \mathcal{R}_0 terdapat beberapa langkah. Pertama didefinisikan $\mathcal{F}_i(x)$ adalah laju dari kemunculan infeksi baru pada kompartemen i , sedangkan $\mathcal{V}_i^-(x)$ adalah laju dari perpindahan individu keluar dari kompartemen i dan $\mathcal{V}_i^+(x)$ adalah laju dari perpindahan individu masuk ke kompartemen i . Model penyebaran penyakit terdiri dari kondisi awal non negatif dengan persamaan sistem sebagai berikut.

$$\dot{x}_i = f_i(x) = \mathcal{F}_i(x) - \mathcal{V}_i(x), i = 1, \dots, n$$

dengan $\mathcal{V}_i(x) = \mathcal{V}_i^-(x) - \mathcal{V}_i^+(x)$. Kemudian langkah kedua harus memenuhi asumsi-asumsi berikut[7].

1. Setiap fungsi mempresentasikan perpindahan langsung dari individu, sehingga semua fungsi bernilai non negatif, maka dapat ditulis

Jika $x \geq 0$, maka $\mathcal{F}_i(x), \mathcal{V}_i^-(x), \mathcal{V}_i^+(x) \geq 0$ untuk $i=1, \dots, n$.

2. Jika sebuah kompartemen kosong dikarenakan kematian atau infeksi, maka tidak ada individu yang keluar dari kompartemen.

Jika $x_i = 0$ maka $\mathcal{V}_i(x) = 0$. Secara khusus, jika $x \in X_S$, maka $\mathcal{V}_i^- = 0$ untuk $i=1, \dots, m$.

3. Untuk kondisi selanjutnya berdasarkan dari fakta sederhana bahwa jika timbulnya infeksi untuk kompartemen yang tidak terinfeksi adalah nol, maka dapat ditulis

$\mathcal{F}_i = 0$, jika $i > m$.

4. Jika populasi bebas dari penyakit maka populasi akan tetap bebas dari penyakit (tidak ada imigrasi atau infeksi).

Jika $x \in X_S$, maka $\mathcal{F}_i(x) = 0$ dan $\mathcal{V}_i^+ = 0$ untuk $i=1, \dots, m$.

5. Berdasarkan turunan dari f didekat titik kesetimbangan bebas penyakit (DFE), didefinisikan DFE dari f adalah penyelesaian kestabilan lokal dari titik kesetimbangan bebas penyakit, dengan f terbatas ke X_S . Jika populasi ada disekitar DFE, maka populasi akan kembali ke DFE menurut linearisasi sistem:

$$\dot{x} = Df(x_0)(x - x_0), \text{ dengan } Df(x_0) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j}$$

Sehingga dapat ditulis,

jika $\mathcal{F}(x)$ menuju ke nol, maka semua nilai eigen dari $Df(x_0)$ mempunyai bagian real negatif.

Dari asumsi 1-5 di atas didapatkan Lemma 2.1 sebagai berikut

Lemma 2.1

Jika x_0 adalah titik kesetimbangan bebas penyakit dan $f_i(x)$ memenuhi asumsi 1-5, maka turunan $Df(x_0)$ dan $D\mathcal{V}(x_0)$ adalah partisi sebagai berikut

$$D\mathcal{F}_i(x_0) = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D\mathcal{V}_i(x_0) = \begin{pmatrix} V & 0 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix}$$

Dengan F dan V adalah matriks berukuran $m \times m$ yang didefinisikan sebagai berikut

$$F = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_i(x_0)}{\partial x_j} \right], V = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_i(x_0)}{\partial x_j} \right], \text{ dengan } 1 \leq i, j \leq m$$

Dengan F non negatif dan V merupakan M-matriks *non-singular*, dan semua nilai eigen dari J_3 dan J_4 adalah positif [7].

Definisi 2.1

Matriks V merupakan M-matriks non singular jika dan hanya jika terdapat bilangan k dan matriks P sedemikian sehingga diketahui $k > \rho(P)$ yang memenuhi $V = kI - P$.

Matriks generasi selanjutnya adalah $A = FV^{-1}$ dan angka reproduksi dasar dapat dituliskan sebagai

$$\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1}) = \rho(A),$$

dengan $\rho(A)$ adalah *spectral radius* dari matriks A , yaitu maksimum modulus nilai eigen dari matriks A [7].

2.4 Kestabilan Titik Tetap

Misal suatu sistem bila variabelnya memiliki pangkat tertinggi satu atau berderajat satu. Persamaan berikut ini merupakan sistem.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 + a_{16}x_6 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 + a_{26}x_6 \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 + a_{36}x_6 \\ \frac{dx_4}{dt} &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 + a_{46}x_6 \\ \frac{dx_5}{dt} &= a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 + a_{56}x_6 \\ \frac{dx_6}{dt} &= a_{61}x_1 + a_{62}x_2 + a_{63}x_3 + a_{64}x_4 + a_{65}x_5 + a_{66}x_6 \end{aligned} \quad (2.1)$$

dengan a_{ij} adalah konstanta riil, untuk $i,j=1,...,6$. Persamaan (2.1) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \\ \frac{dx_4}{dt} \\ \frac{dx_5}{dt} \\ \frac{dx_6}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

atau secara ringkas dapat dituliskan sebagai $\frac{dx}{dt} = Ax$

Misalkan akar-akar persamaan karakteristik sistem (2.1) adalah $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$, dan λ_6 disebut nilai eigen. Nilai eigen tersebut digunakan untuk menentukan jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.1). untuk memperoleh nilai eigen digunakan rumus $\det(A - \lambda I) = 0$. Kriteria jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.1) berdasarkan nilai eigen dijelaskan sebagai berikut.

Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$, dan λ_6 adalah nilai eigen matriks koefisien A sistem dengan $\det(A) \neq 0$. Titik kesetimbangan x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , dan x_6 bersifat[8]

- stabil asimtotik, jika bagian riil semua nilai eigen matriks A negatif,
- stabil center, jika semua nilai eigen memiliki bagian riil bernilai nol,
- tidak stabil, jika sedikitnya satu nilai eigen memiliki bagian riil positif

2.5 Stabil Asimtotik Lokal

Kestabilan asimtotis lokal pada titik keseimbangan ditentukan oleh tanda pada bagian real dari akar-akar karakteristik sistem.

Teorema 2.1

Titik setimbang (\bar{x}_0, \bar{y}_0) stabil asimtotis jika dan hanya jika nilai karakteristik dari

$$\text{Matriks } J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

mempunyai tanda negatif pada bagian realnya dan tidak stabil jika sedikitnya satu dari nilai karakteristik mempunyai tanda positif pada bagian realnya.

Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui laju penyebaran suatu penyakit. Analisis ini dilakukan pada titik setimbang bebas penyakit (*Disease Free Equilibrium*) dan titik setimbang endemik (*Endemic Equilibrium*) [8].

2.6 Kriteria Routh-Hurwitz

Nilai eigen matriks Jacobi dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan karakteristik yang dapat juga ditulis sebagai

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (2.2)$$

Persamaan (2.2) umumnya sulit untuk diselesaikan. Dalam hal ini dapat digunakan Kriteria Routh-Hurwitz sebagai alat bantu untuk mengetahui sifat kestabilan nilai eigen matriks Jacobi.

Teorema 2.1 Kriteria Routh-Hurwitz

Akar-akar persamaan karakteristik (2.2) mempunyai bagian riil negatif jika $a_n > 0$ dan

$$D_1 = a_1 > 0; D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}; D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0; \dots; D_k$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & \cdot \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} > 0, k = 1, 2, \dots, n$$

Untuk $n=6$, persamaan (2.2) menjadi

$$\lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6 = 0 \quad (2.3)$$

Akar-akar persamaan (2.3) akan bernilai negatif jika dan hanya jika a_1 dan $a_1a_2 - a_3$ bernilai positif serta $a_1a_2a_3 + a_1a_5 > a_4a_1^2 + a_3^2$ [9].

2.7 Metode Runge - Kutta

Pada metode ini nilai k sebelumnya digunakan. Perhitungan x dan y bergantian [10].

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_{1,x} + 2k_{2,x} + 2k_{3,x} + k_{4,x})$$

dengan

$$k_{1,x} = hf(t_0, x_0)$$

$$k_{2,x} = hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{k_{1,x}}{2}\right)$$

$$k_{3,x} = hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{k_{2,x}}{2}\right)$$

$$k_{4,x} = hf(t_0 + h, x_0 + k_{3,x})$$

dan

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_{1,y} + 2k_{2,y} + 2k_{3,y} + k_{4,y})$$

dengan

$$k_{1,y} = hf(t_0, y_0)$$

$$k_{2,y} = hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_{1,y}}{2}\right)$$

$$k_{3,y} = hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_{2,y}}{2}\right)$$

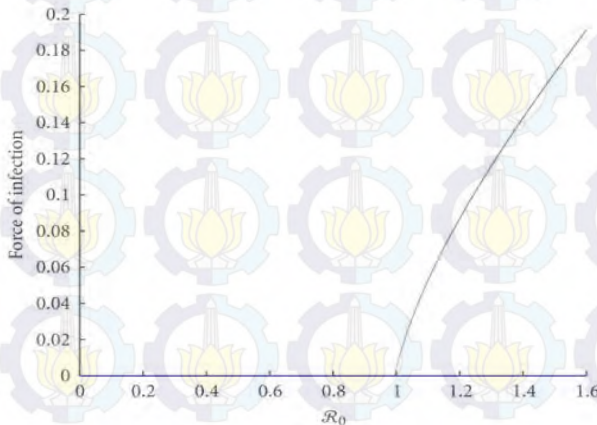
$$k_{4,y} = hf(t_0 + h, y_0 + k_{3,y})$$

2.8 Bifurkasi

Pada sistem dinamik non linear sering dijumpai kestabilan di sekitar titik kesetimbangan suatu sistem persamaan yang menunjukkan fenomena bifurkasi. Bifurkasi secara umum adalah perubahan kualitatif yang meliputi perubahan stabilitas dan perubahan banyaknya titik kesetimbangan yang disebabkan oleh adanya perubahan nilai-nilai parameter. Dalam epidemiologi, fenomena bifurkasi berhubungan dengan parameter ambang batas, yang sering disebut bilangan reproduksi dasar dan biasanya disimbolkan dengan \mathcal{R}_0 .

Bifurkasi dalam model penyebaran penyakit menular yaitu bifurkasi maju. Eksistensi bifurkasi maju pada model penyebaran penyakit ditunjukkan oleh diagram bifurkasi pada Gambar 2.1 dengan merupakan parameter bifurkasi dan merupakan populasi individu yang terinfeksi penyakit.

Fenomena bifurkasi maju terjadi pada saat $\mathcal{R}_0 > 1$ dimana hanya ada satu titik kesetimbangan endemik. [11].



Gambar 2.1 Bifurkasi Maju



BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini menguraikan metode yang digunakan dalam penelitian secara rinci. Metodologi penelitian yang digunakan berguna sebagai acuan sehingga penelitian dapat berjalan sistematis.

3.1 Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan analisis model dengan mempelajari literatur-literatur yang terkait seperti jurnal, paper dan buku-buku yang berhubungan dengan model tipe SEIR yang dan metode numerik Runge Kutta.

3.2 Tahap Mengkonstruksi Model Interaksi Dinamis

Untuk memahami model interaksi dinamik disusun asumsi-asumsi tertentu sehingga dapat dibuat model kompartemen dengan *susceptible*, *exposed*, *infected*, dan *recovered* untuk populasi manusia dan *aquatic phase*, *susceptible* dan *infected* untuk populasi nyamuk.

3.3 Mencari Titik Keseimbangan

Pada tahap ini dicari titik keseimbangan pada penyebaran penyakit yang terdiri dari dua titik keseimbangan yaitu titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik.

3.3.1 Mencari Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Pada tahap ini dibentuk model interaksi dinamis dalam keadaan setimbang ketika laju populasi masing - masing adalah nol. Selanjutnya dari model tersebut dicari titik keseimbangan ketika tidak ada penyebaran penyakit. Oleh karena itu ada model disubstitusikan $I=0$ sedemikian hingga diperoleh titik keseimbangan bebas penyakit.

3.3.2 Mencari Titik Keseimbangan Endemik

Pada tahap ini dicari titik keseimbangan endemik dengan cara yang sama saat mencari titik keseimbangan bebas penyakit, yaitu dengan membentuk keadaan setimbang dari model dan selanjutnya mencari titik keseimbangan ketika ada penyebaran penyakit $I_h = I_m = I^* \neq 0$.

3.4 Menentukan Bilangan Reproduksi Dasar

Pada Tahap ini ditentukan Bilangan Reproduksi Dasar adalah *spectral radius* dari operator generasi selanjutnya. *Spectral radius* diperoleh dengan mendefinisikan $\mathcal{F}_i(x)$ dan $\mathcal{V}_i(x)$. Kemudian mencari matriks Jacobian F dan V . Selanjutnya mensubstitusi nilai titik keseimbangan bebas penyakit ke dalam matriks tersebut sedemikian hingga diperoleh akar persamaan karakteristik dan nilai eigen. Bilangan reproduksi dasar didapat dari $\rho(FV^{-1})$ yang merupakan nilai maksimum dari nilai eigen.

3.5 Menganalisis Kestabilan Titik Keseimbangan

Tahap ini akan dicari kestabilan lokal dari titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik dengan memasukkan nilai keseimbangan kedalam matriks Jacobian, sehingga didapatkan nilai akar-akar karakteristik dari matriks Jacobiannya untuk mengetahui kestabilan asimtotik lokal pada titik–titik tersebut.

3.6 Menyelidiki Terjadinya Bifurkasi

Berdasarkan titik keseimbangan endemik yang diperoleh pada tahap sebelumnya, pada tahap ini dilakukan analisis banyaknya penyelesaian dari I_h^* dan \mathcal{R}_0 yang mempengaruhi terjadinya bifurkasi.

3.7 Membuat Simulasi

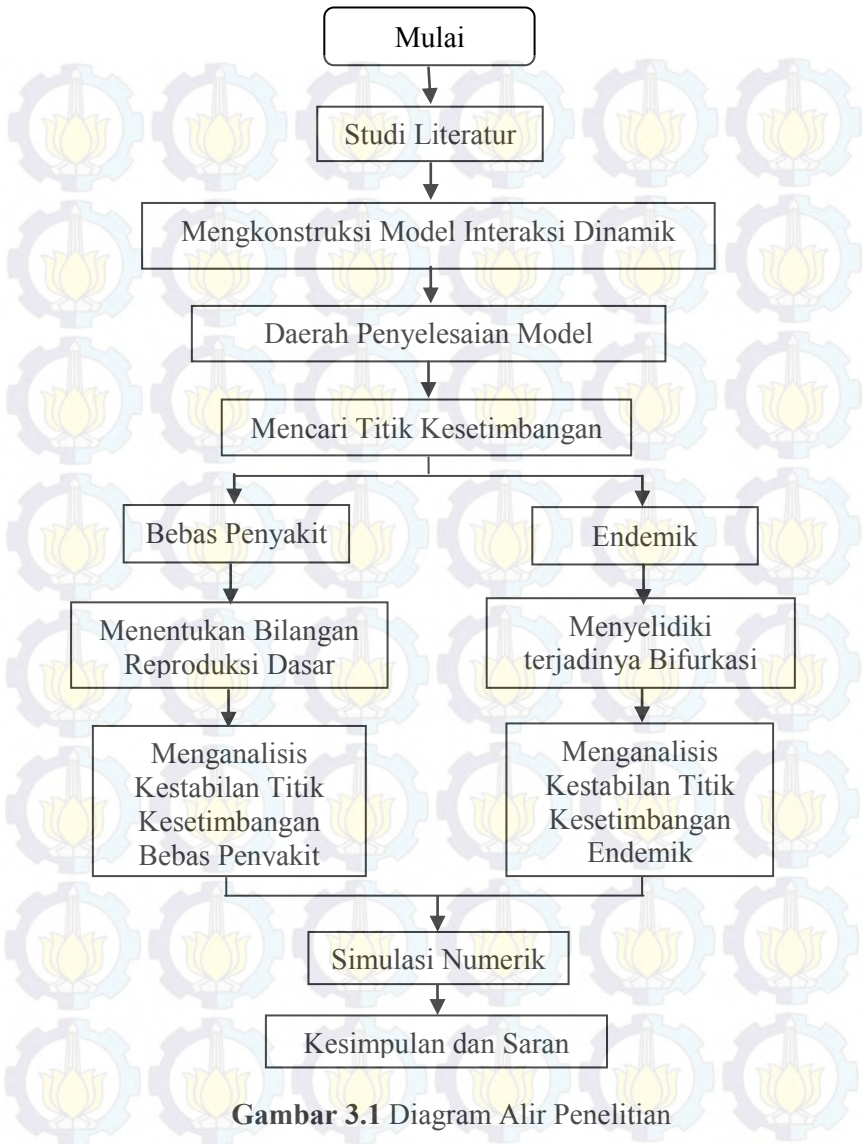
Pada tahap ini dilakukan analisis hubungan antara bilangan reproduksi dasar dan stabilitas titik keseimbangan dengan metode numerik Runge Kutta orde 4, menggunakan MATLAB.

3.8 Kesimpulan dan Saran

Pada tahap terakhir ini dilakukan penarikan simpulan dari hasil pembahasan sebelumnya. Selanjutnya diberikan saran untuk perbaikan pada penelitian berikutnya.

3.9 Diagram Alir

Pada Tahap ini disusun diagram alir pada **Gambar 3.1** sebagai langkah langkah yang dilakukan untuk mencapai tujuan dari penelitian.



BAB IV

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai model epidemiologi SEIR pada demam berdarah, daerah penyelesaian model, titik kesetimbangan bebas penyakit, titik kesetimbangan endemik, kemudian akan dicari kestabilan lokal dari setiap titik kesetimbangan tersebut, dan bilangan reproduksi dasar, kemudian menentukan bifurkasinya berdasarkan nilai bilangan reproduksi dasar. Selanjutnya akan dilakukan penyelesaian numerik untuk model dengan menggunakan metode numerik Runge-Kutta dan mensimulasikannya.

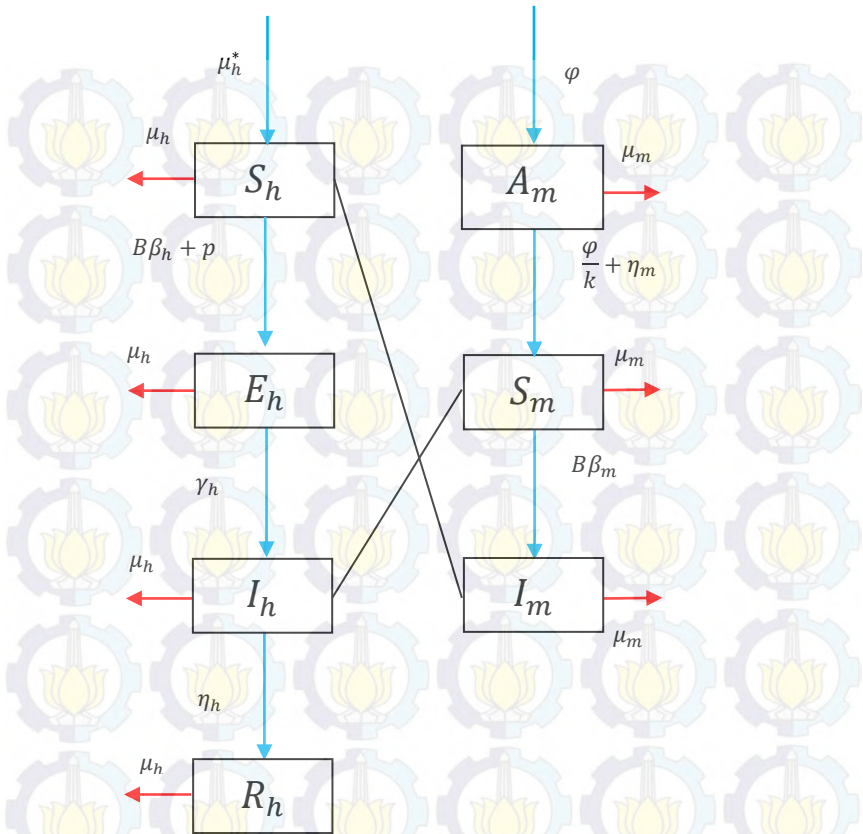
4.1 Konstruksi Model Epidemiologi SEIR pada Demam Berdarah

Model epidemiologi tipe SEIR yang akan dibahas pada Tugas Akhir ini digambarkan sebagai berikut :

1. Individu dikelompokkan menjadi empat kelompok, yaitu *susceptible* ($S_h(t)$) adalah individu yang rentan terhadap penyakit demam berdarah pada saat t , *exposed* ($E_h(t)$) adalah individu yang terjangkit penyakit dan dapat menularkan penyakit tetapi belum menunjukkan adanya gejala awal dari penyakit pada saat t , *infected* ($I_h(t)$) adalah individu yang terinfeksi penyakit pada saat t , dan *recovered* ($R_h(t)$) adalah individu yang telah sembuh pada saat t . Sedangkan untuk nyamuk dikelompokkan menjadi tiga yaitu *aquatic* ($A_m(t)$) adalah nyamuk dalam fase akuatik meliputi telur, larva, dan tahap pupa, *susceptible* ($S_m(t)$) adalah nyamuk yang rentan penyakit demam berdarah pada saat t , dan *infected* ($I_m(t)$) adalah nyamuk yang terinfeksi pada saat t sehingga dapat menularkan penyakit. Jumlah populasi individu dinyatakan sebagai $N_h(t)$ dengan $N_h(t) = S_h(t) + E_h(t) + I_h(t) + R_h(t)$ sedangkan untuk populasi nyamuk dinyatakan sebagai $N_m(t) = A_m(t) + S_m(t) + I_m(t)$.

2. Model mendeskripsikan interaksi antara individu rentan mempunyai peluang terinfeksi virus demam berdarah pada laju perubahan $\frac{B\beta_h}{N_h} I_m$, dengan $B\beta_h$ menyatakan hubungan laju perubahan dari nyamuk berinteraksi dengan manusia dan peluang terjadinya penyebaran dari individu terinfeksi terhadap nyamuk yang berpotensi terinfeksi. Nyamuk rentan mempunyai peluang terinfeksi dengan virus demam berdarah pada laju perubahan $B\beta_m \frac{I_h}{N_h}$, dimana $B\beta_m$ merupakan laju korelasi yang cukup dari manusia ke nyamuk dan menghitung peluang penyebaran dari nyamuk terinfeksi terhadap manusia yang berpotensi terinfeksi
3. Parameter – parameter yang terdapat pada model dinamik adalah
 - a. μ_h menyatakan jumlah kematian alami dari populasi individu dan μ_m menyatakan angka kematian alami dari populasi nyamuk.
 - b. B menyatakan rata – rata gigitan nyamuk (per hari)
 - c. β_h menyatakan laju penularan melalui gigitan nyamuk yang terinfeksi dan β_m menyatakan laju penularan dari individu terinfeksi yang digigit oleh nyamuk.
 - d. p menyatakan nilai persentase nyamuk terinfeksi.
 - e. γ_h menyatakan laju proporsi individu yang terjangkit infeksi virus demam berdarah.
 - f. η_h menyatakan laju individu terinfeksi penyakit demam berdarah yang akan sembuh karena dilakukan treatment dan η_m menyatakan laju pertumbuhan larva menjadi dewasa.
 - g. μ_h^* menyatakan banyaknya kelahiran dan ϕ menyatakan banyaknya telur – telur pada masing – masing deposit per kapita.
 - h. k menyatakan banyaknya larva per individu.

Dari model epidemiologi SEIR di atas dapat digambarkan diagram kompartemen dari model interaksi dinamis sebagai berikut :



Gambar 4.1 Diagram Kompartemen dari Model Interaksi Dinamis

Berdasarkan diagram kompartemen pada Gambar 4.1 diperoleh model interaksi dinamik sebagai berikut :

1. Persamaan diferensial untuk *Susceptible* adalah

$$\frac{dS_h}{dt} = \mu_h^* N_h - B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m - pS_h - \mu_h S_h$$

yaitu besarnya laju perubahan populasi dari suatu individu yang rentan terhadap penyakit demam berdarah dipengaruhi oleh fungsi kelahiran dari jumlah seluruh populasi bN_h . Menurunnya populasi S_h disebabkan peluang transmisi nyamuk terinfeksi yang menggigit manusia yang rentan, presentase individu yang rentan pS_h , dan laju kematian pada populasi *susceptible* $\mu_h S_h$

2. Persamaan diferensial untuk *Exposed* adalah

$$\frac{dE_h}{dt} = B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m + pS_h - \mu_h E_h - \gamma_h E_h$$

yaitu besarnya laju perubahan individu yang terjangkit oleh virus dan dapat menularkan penyakit namun belum ada gejala awal dipengaruhi adanya peluang laju transmisi dari populasi nyamuk yang terinfeksi menggigit populasi individu yang rentan $B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m$ serta persentase dari individu yang rentan pS_h . Menurunnya populasi E_h disebabkan laju kematian pada populasi $\mu_h E_h$ dan laju proporsi individu yang terjangkit infeksi virus demam berdarah $\gamma_h E_h$.

3. Persamaan diferensial untuk *Infected* adalah

$$\frac{dI_h}{dt} = \gamma_h E_h - (\eta_h + \mu_h) I_h$$

yaitu besarnya laju perubahan individu yang terinfeksi dipengaruhi oleh bertambahnya laju proporsi individu yang terjangkit infeksi virus demam berdarah $\gamma_h E_h$ dan berkurangnya individu yang terinfeksi oleh virus demam berdarah karena diberikan bantuan treatment $\eta_h I_h$ serta kematian alami $\mu_h I_h$. Dengan demikian, asumsi model tersebut bahwa setiap individu yang ditreatment akan mempunyai masa pemulihan sehingga tidak akan ada kasus infeksi yang terulang lagi.

4. Persamaan diferensial untuk *Recovered* adalah

$$\frac{dR_h}{dt} = \eta_h I_h - \mu_h R_h$$

yaitu besarnya laju perubahan populasi individu yang sembuh dari penyakit (*recovered*) bergantung pada laju individu terinfeksi penyakit demam berdarah yang akan sembuh karena dilakukan treatment $\eta_h I_h$ dan populasi akan berkurang saat terdapat kejadian kematian individu yang sembuh $\mu_h R_h$.

5. Persamaan diferensial untuk *Aquatic phase* adalah

$$\frac{dA_m}{dt} = \varphi \left(1 - \frac{A_m}{kN_m} \right) (S_m + I_m) - (\eta_m + \mu_m) A_m$$

yaitu besarnya laju perubahan populasi nyamuk pada fase aquatik yang meliputi telur, larva, dan pupa dipengaruhi oleh bertambahnya jumlah tiap – tiap telur nyamuk yang rentan φS_m dan telur nyamuk yang terinfeksi φI_m . Menurunnya populasi nyamuk A_m disebabkan jumlah larva pada nyamuk yang rentan $\frac{A_m}{kN_m} S_m$ dan jumlah larva pada nyamuk terinfeksi $\frac{A_m}{kN_m} I_m$, serta laju pertumbuhan larva menjadi dewasa $\eta_m A_m$ dan laju kematian pada fase aquatik $\mu_m A_m$.

6. Persamaan diferensial untuk *Susceptible* adalah

$$\frac{dS_m}{dt} = \eta_m A_m - (B\beta_m \frac{I_h}{N_h} + \mu_m) S_m$$

yaitu besarnya laju perubahan populasi nyamuk yang rentan dipengaruhi laju pertumbuhan larva menjadi dewasa $\eta_m A_m$. Menurunnya populasi nyamuk yang rentan S_m disebabkan laju transmisi dari nyamuk yang rentan menggigit individu yang terinfeksi $B\beta_m \frac{I_h}{N_h} S_m$ dan laju kematian pada populasi yang rentan $\mu_m S_m$.

7. Persamaan diferensial untuk *Infected* adalah

$$\frac{dI_m}{dt} = B\beta_m \frac{I_h}{N_h} S_m - \mu_m I_m$$

yaitu besarnya laju perubahan populasi nyamuk yang terinfeksi dipengaruhi oleh bertambahnya laju transmisi nyamuk yang rentan menggigit individu yang terinfeksi

$B\beta_m \frac{I_h}{N_h} S_m$. Menurunnya populasi I_m disebabkan laju kematian populasi nyamuk yang terinfeksi $\mu_m I_m$.

Dari penjelasan sebelumnya maka model tipe SEIR dapat ditulis sebagai sistem persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dS_h}{dt} = \mu_h^* N_h - B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m - pS_h - \mu_h S_h \quad (4.1)$$

$$\frac{dE_h}{dt} = B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m + pS_h - (\mu_h + \gamma_h) E_h \quad (4.2)$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \gamma_h E_h - (\eta_h + \mu_h) I_h \quad (4.3)$$

$$\frac{dR_h}{dt} = \eta_h I_h - \mu_h R_h \quad (4.4)$$

$$\frac{dA_m}{dt} = \varphi \left(1 - \frac{A_m}{kN_m} \right) (S_m + I_m) - (\eta_m + \mu_m) A_m \quad (4.5)$$

$$\frac{dS_m}{dt} = \eta_m A_m - \left(B\beta_m \frac{I_h}{N_h} + \mu_m \right) S_m \quad (4.6)$$

$$\frac{dI_m}{dt} = B\beta_m \frac{I_h}{N_h} S_m - \mu_m I_m \quad (4.7)$$

dengan kondisi awal

$$S_h(0) = S_{h0}, \quad E_h(0) = E_{h0}, \quad I_h(0) = I_{h0}, \quad R_h(0) = R_{h0}, \\ A_m(0) = A_{m0}, \quad S_m(0) = S_{m0}, \quad I_m(0) = I_{m0}$$

Jumlah populasi individu $S_h(t) + E_h(t) + I_h(t) + R_h(t) = N_h(t)$ sehingga dapat dituliskan $R_h(t) = N_h(t) - S_h(t) - E_h(t) - I_h(t)$ dan $A_m(t) + S_m(t) + I_m(t) = N_m(t)$ dengan $N(t)$ adalah jumlah populasi, maka dalam hal ini

$$\frac{dN_h}{dt} = \frac{dS_h}{dt} + \frac{dE_h}{dt} + \frac{dI_h}{dt} + \frac{dR_h}{dt} \quad (4.8)$$

$$\frac{dN_m}{dt} = \frac{dA_m}{dt} + \frac{dS_m}{dt} + \frac{dI_m}{dt} \quad (4.9)$$

Sehingga untuk persamaan (4.8) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{dN_h}{dt} = \left\{ \mu_h^* N_h - B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m - pS_h - \mu_h S_h \right\} + \left\{ B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m + pS_h - (\mu_h + \gamma_h) E_h \right\} + \left\{ \gamma_h E_h - (\eta_h + \mu_h) I_h \right\} + \left\{ \eta_h I_h - \mu_h R_h \right\}$$

$$= \mu_h^* N_h - \mu_h S_h - \mu_h E_h - \mu_h I_h - \mu_h R_h$$

Substitusikan $R_h(t) = N_h(t) - S_h(t) - E_h(t) - I_h(t)$

$$\begin{aligned} \frac{dN_h}{dt} &= \mu_h^* N_h - \mu_h S_h - \mu_h E_h - \mu_h I_h - \mu_h (N_h - S_h - E_h - I_h) \\ &= \mu_h^* N_h - \mu_h S_h - \mu_h E_h - \mu_h I_h - \mu_h N_h + \mu_h S_h + \mu_h E_h + \mu_h I_h \\ \frac{dN_h}{dt} &= (\mu_h^* - \mu_h) N_h \end{aligned} \quad (4.10)$$

maka sistem persamaan model menjadi :

$$\frac{dS_h}{dt} = \mu_h^* N_h - B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m - pS_h - \mu_h S_h \quad (4.11)$$

$$\frac{dE_h}{dt} = B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m + pS_h - (\mu_h + \gamma_h) E_h \quad (4.12)$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \gamma_h E_h - (\eta_h + \mu_h) I_h \quad (4.13)$$

$$\frac{dA_m}{dt} = \varphi \left(1 - \frac{A_m}{kN_m} \right) (S_m + I_m) - (\eta_m + \mu_m) A_m \quad (4.14)$$

$$\frac{dS_m}{dt} = \eta_m A_m - \left(B\beta_m \frac{I_h}{N_h} + \mu_m \right) S_m \quad (4.15)$$

$$\frac{dI_m}{dt} = B\beta_m \frac{I_h}{N_h} S_m - \mu_m I_m \quad (4.16)$$

dengan kondisi awal,

$$S_h(0) = S_{h0}, E_h(0) = E_{h0}, I_h(0) = I_{h0}, A_m(0) = A_{m0}, S_m(0) = S_{m0}, I_m(0) = I_{m0} \quad (4.17)$$

4.2 Daerah Penyelesaian Model

Dengan cara yang sama akan dicari nilai $\frac{dA_m}{dt}$ dan $\frac{dS_m}{dt} + \frac{dI_m}{dt}$. Sehingga dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dA_m}{dt} &= \left\{ \varphi \left(1 - \frac{A_m}{kN_m} \right) (S_m + I_m) - (\eta_m + \mu_m) A_m \right\} \\ \frac{dA_m}{dt} &= \left(\varphi - \frac{\varphi A_m}{kN_m} \right) (S_m + I_m) - (\eta_m + \mu_m) A_m \end{aligned} \quad (4.18)$$

Berdasarkan persamaan (4.18) ruas kanan diketahui bahwa

$$\left(\varphi - \frac{\varphi A_m}{kN_m}\right)(S_m + I_m) - (\eta_m + \mu_m)A_m \leq \varphi - \frac{\varphi A_m}{kN_m}$$

maka pada persamaan (4.18) dapat menjadi sebagai berikut

$$\frac{dA_m}{dt} \leq \left(\varphi - \frac{\varphi A_m}{kN_m}\right)$$

Selanjutnya akan diselesaikan persamaan diferensial sebagai berikut

$$\frac{dA_m}{dt} = \left(\varphi - \frac{\varphi A_m}{kN_m}\right)$$

dengan mengintegralkan kedua ruas diperoleh

$$\int \frac{dA_m}{\left(\varphi - \frac{\varphi A_m}{kN_m}\right)} = \int dt \quad (4.19)$$

dengan mensubstitusikan $u = \left(\varphi - \frac{\varphi A_m}{kN_m}\right)$ maka $dA_m = -du \frac{kN_m}{\varphi}$

sehingga pada persamaan (4.19) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\int \frac{-\frac{kN_m}{\varphi} du}{u} = \int dt$$

selanjutnya dari persamaan diatas diperoleh bahwa

$$\int \frac{-\frac{kN_m}{\varphi} du}{u} = \int dt$$

$$\Leftrightarrow -\frac{kN_m}{\varphi} \int \frac{1}{u} du = \int dt$$

$$\Leftrightarrow -\frac{kN_m}{\varphi} \ln |u| = t + c$$

$$\Leftrightarrow \ln |u| = -\frac{\varphi}{kN_m} (t + c)$$

$$\Leftrightarrow u = e^{-\frac{\varphi}{kN_m}(t+c)}$$

kemudian substitusikan nilai $u = \left(\varphi - \frac{\varphi A_m}{kN_m}\right)$ ke persamaan

$$u = e^{-\frac{\varphi}{kN_m}(t+c)} \text{ sehingga diperoleh}$$

$$u = e^{-\frac{\varphi}{kN_m}(t+c)}$$

$$\Rightarrow \left(\varphi - \frac{\varphi A_m}{kN_m}\right) = e^{-\frac{\varphi}{kN_m}(t+c)}$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi A_m}{kN_m} = \varphi - e^{-\frac{\varphi}{kN_m}(t+c)}$$

$$\Rightarrow A_m = \frac{kN_m}{\varphi} \left(\varphi - e^{-\frac{\varphi}{kN_m}(t+c)} \right)$$

$$\Rightarrow A_m = kN_m - \frac{kN_m}{\varphi} e^{-\frac{\varphi}{kN_m}(t+c)}$$

Dari persamaan di atas di ketahui bahwa nilai $A_m(t)$ berubah terhadap t . Artinya semakin besar nilai t maka semakin kecil nilai $e^{-\frac{\varphi}{kN_m}(t+c)}$. Karena itu,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A_m = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(kN_m - \frac{kN_m}{\varphi} e^{-\frac{\varphi}{kN_m}(t+c)} \right) \\ = kN_m - 0$$

sehingga diperoleh $A_m(t) \leq kN_m$. Dalam hal ini kN_m merupakan kapasitas batas populasi nyamuk fase akuatik.

Selanjutnya akan diselesaikan persamaan berikut :

$$\frac{dS_m}{dt} + \frac{dI_m}{dt} = \left(\eta_m A_m - \left(B\beta_m \frac{I_h}{N_h} + \mu_m \right) S_m \right) + \left(B\beta_m \frac{I_h}{N_h} S_m - \mu_m I_m \right) \quad (4.20)$$

$$\frac{dS_m}{dt} + \frac{dI_m}{dt} = \eta_m A_m - \mu_m S_m - \mu_m I_m$$

$$\frac{d}{dt} (S_m + I_m) = \eta_m A_m - \mu_m S_m - \mu_m I_m \quad (4.21)$$

Selanjutnya akan diselesaikan persamaan diferensial sebagai berikut

$$\frac{d}{dt} (S_m + I_m) = \eta_m A_m - \mu_m S_m - \mu_m I_m$$

dengan mengintegrasikan kedua ruas sehingga diperoleh

$$\int \frac{d(S_m + I_m)}{\eta_m A_m - \mu_m S_m - \mu_m I_m} = \int dt \quad (4.22)$$

kemudian substitusikan nilai $v = \eta_m A_m - \mu_m(x)$ dengan $x =$

$$S_m + I_m \text{ maka diperoleh } dx = -\frac{dv}{\mu_m}$$

bentuk (4.22) menjadi

$$\int \frac{dx}{v} = \int dt$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{\frac{dv}{\mu_m}}{v} = \int dt$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\mu_m} \int \frac{1}{v} dv = \int dt$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\mu_m} \ln |v| = t + c$$

$$\Leftrightarrow \ln |v| = -\mu_m(t + c)$$

$$\Leftrightarrow v = e^{-\mu_m(t+c)}$$

kemudian substitusikan nilai $v = \eta_m A_m - \mu_m(x)$ dengan $x = S_m + I_m$ ke persamaan $v = e^{-\mu_m(t+c)}$ sehingga diperoleh $v = e^{-\mu_m(t+c)}$

$$\Rightarrow \eta_m A_m - \mu_m(x) = e^{-\mu_m(t+c)}$$

$$\Rightarrow \eta_m A_m - \mu_m(S_m + I_m) = e^{-\mu_m(t+c)}$$

$$\Rightarrow S_m + I_m = \frac{\eta_m A_m - e^{-\mu_m(t+c)}}{\mu_m}$$

Dari persamaan di atas diketahui bahwa nilai $S_m(t) + I_m(t)$ berubah terhadap t . Artinya semakin besar nilai t maka semakin kecil nilai $e^{-\mu_m(t+c)}$. Karena itu,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (S_m + I_m) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\eta_m A_m - e^{-\mu_m(t+c)}}{\mu_m} \\ &= \frac{\eta_m A_m}{\mu_m} - 0 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh $S_m + I_m \leq \frac{\eta_m A_m}{\mu_m}$. Dalam hal ini berarti bahwa $\frac{\eta_m A_m}{\mu_m}$ merupakan kapasitas batas populasi nyamuk rentan dan terinfeksi.

Jadi daerah yang mungkin untuk sistem persamaan (4.11) sampai (4.16) adalah $\Omega = \{(A_m, S_m, I_m) \in R_+^3 : A_m \leq kN_m, S_m + I_m \leq \frac{\eta_m A_m}{\mu_m}\}$ dikarenakan kondisi awal pada persamaan (4.17) bernilai positif dan pada R_+^3 , maka merupakan invarian positif.

4.3 Titik Kesetimbangan

4.3.1 Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit merupakan suatu kondisi yang tidak terdapat penyebaran penyakit demam berdarah *dengue* dalam suatu populasi sehingga $I = 0$.

Untuk memperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit akan dinyatakan ruas kiri pada persamaan (4.11) sampai (4.16) bernilai nol kemudian mensubstitusikannya sehingga diperoleh

$$E_0 = (S_h^0, E_h^0, I_h^0, A_m^0, S_m^0, I_m^0).$$

Dalam kondisi tidak terjadi penyebaran penyakit, maka $I_h = I_m = 0$. Selanjutnya akan dicari $S_h^0, E_h^0, R_h^0, A_m^0, S_m^0$ yang ruas kanannya bernilai nol lalu mensubstitusikan $I_h^0 = I_m^0 = 0$.

Menentukan S_h^0

$$\frac{dS_h}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu_h^* N_h - \left(B\beta_h \frac{I_m}{N_h} + p + \mu_h \right) S_h = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu_h^* N_h = \left(B\beta_h \frac{I_m}{N_h} + p + \mu_h \right) S_h$$

$$\Leftrightarrow \mu_h^* N_h = (p + \mu_h) S_h$$

$$\Leftrightarrow S_h = \frac{\mu_h^* N_h}{(p + \mu_h)}$$

$$\text{Maka } S_h^0 = \frac{\mu_h^* N_h}{(p + \mu_h)} \quad (4.23)$$

Menentukan E_h^0

$$\frac{dE_h}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(B\beta_h \frac{I_m}{N_h} + p \right) S_h - (\mu_h + \gamma_h) E_h = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(B\beta_h \frac{I_m}{N_h} + p \right) S_h = (\mu_h + \gamma_h) E_h$$

$$\Leftrightarrow p S_h = (\mu_h + \gamma_h) E_h \quad (4.24)$$

kemudian substitusikan persamaan (4.23) ke persamaan (4.24) maka diperoleh

$$\Leftrightarrow p \frac{\mu_h^* N_h}{(p + \mu_h)} = (\mu_h + \gamma_h) E_h$$

$$\Leftrightarrow E_h = \frac{p \frac{\mu_h^* N_h}{(p + \mu_h)}}{(\mu_h + \gamma_h)}$$

$$\Leftrightarrow E_h = p \frac{\mu_h^* N_h}{(p + \mu_h)(\mu_h + \gamma_h)}$$

$$\text{Maka } E_h^0 = p \frac{\mu_h^* N_h}{(p + \mu_h)(\mu_h + \gamma_h)}$$

Menentukan A_m^0

$$\begin{aligned}
 \frac{dA_m}{dt} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \varphi \left(1 - \frac{A_m}{kN_m} \right) (S_m + I_m) - (\eta_m + \mu_m) A_m &= 0 \\
 \Leftrightarrow \varphi \left(1 - \frac{A_m}{kN_m} \right) (S_m) &= (\eta_m + \mu_m) A_m \\
 \Leftrightarrow \varphi S_m - \frac{A_m}{kN_m} \varphi S_m &= (\eta_m + \mu_m) A_m \\
 \Leftrightarrow \varphi S_m &= (\eta_m + \mu_m) A_m + \frac{A_m}{kN_m} \varphi S_m \\
 \Leftrightarrow \varphi S_m &= A_m \left((\eta_m + \mu_m) + \frac{\varphi S_m}{kN_m} \right) \\
 \Leftrightarrow A_m &= \frac{\varphi S_m}{\eta_m + \mu_m + \frac{\varphi S_m}{kN_m}}
 \end{aligned}$$

Maka $A_m^0 = \frac{\varphi S_m}{\eta_m + \mu_m + \frac{\varphi S_m}{kN_m}}$ (4.25)

Menentukan S_m^0

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_m}{dt} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \eta_m A_m - \left(B\beta_m \frac{I_h}{N_h} + \mu_m \right) S_m &= 0 \\
 \Leftrightarrow \eta_m A_m &= \mu_m S_m
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

Substitusikan persamaan (4.25) ke persamaan (4.26) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \eta_m \frac{\varphi S_m}{\eta_m + \mu_m + \frac{\varphi S_m}{kN_m}} &= \mu_m S_m \\
 \Leftrightarrow \eta_m \varphi S_m &= \left(\eta_m + \mu_m + \frac{\varphi S_m}{kN_m} \right) (\mu_m S_m) \\
 \Leftrightarrow \frac{\eta_m \varphi}{\mu_m} &= \eta_m + \mu_m + \frac{\varphi S_m}{kN_m} \\
 \Leftrightarrow \frac{\eta_m \varphi}{\mu_m} - \eta_m - \mu_m &= \frac{\varphi S_m}{kN_m} \\
 \Leftrightarrow S_m &= \frac{kN_m}{\varphi} \left(\frac{\eta_m \varphi}{\mu_m} - \eta_m - \mu_m \right) \\
 \Leftrightarrow S_m &= \frac{kN_m \eta_m}{\mu_m} - \frac{kN_m \eta_m}{\varphi} - \frac{kN_m \mu_m}{\varphi} \\
 \Leftrightarrow S_m &= \frac{kN_m}{\mu_m \varphi} (\varphi \eta_m - \mu_m \eta_m - \mu_m \mu_m)
 \end{aligned}$$

$$\text{Maka } S_m^0 = \frac{kN_m}{\mu_m \varphi} (\varphi \eta_m - \mu_m \eta_m - \mu_m \mu_m) \quad (4.27)$$

Sehingga untuk persamaan (4.27) akan disubstitusikan ke persamaan (4.25) menjadi

$$\begin{aligned} A_m^0 &= \frac{\varphi \left(\frac{kN_m \eta_m}{\mu_m} - \frac{kN_m \eta_m}{\varphi} - \frac{kN_m \mu_m}{\varphi} \right)}{\eta_m + \mu_m + \frac{\varphi \left(\frac{kN_m \eta_m}{\mu_m} - \frac{kN_m \eta_m}{\varphi} - \frac{kN_m \mu_m}{\varphi} \right)}{kN_m} \\ &= \frac{\frac{\varphi kN_m \eta_m}{\mu_m} - kN_m \eta_m - kN_m \mu_m}{\eta_m + \mu_m + \frac{\varphi kN_m \eta_m}{\mu_m} - kN_m \eta_m - kN_m \mu_m} \\ &= \frac{\frac{\varphi kN_m \eta_m}{\mu_m} - kN_m \eta_m - kN_m \mu_m}{\eta_m + \mu_m + \frac{\varphi \eta_m}{\mu_m} - \eta_m - \mu_m} \\ &= \frac{\frac{\varphi kN_m \eta_m}{\mu_m} - kN_m \eta_m - kN_m \mu_m}{\frac{\varphi \eta_m}{\mu_m}} \\ A_m^0 &= kN_m - \frac{kN_m \mu_m}{\varphi} - \frac{kN_m \mu_m \mu_m}{\varphi \eta_m} \\ &= \frac{kN_m}{\varphi \eta_m} (\varphi \eta_m - \eta_m \mu_m - \mu_m \mu_m) \end{aligned} \quad (4.28)$$

diasumsikan bahwa $\mathcal{M} = -(\eta_m \mu_m + \mu_m \mu_m - \varphi \eta_m)$

$$\begin{aligned} \text{Jadi } E_0 &= \left\{ \frac{\mu_h^* N_h}{(p + \mu_h)}, \frac{p \mu_h^* N_h}{(p + \mu_h)(\mu_h + \gamma_h)}, 0, \frac{kN_m}{\varphi \eta_m} (\varphi \eta_m - \eta_m \mu_m - \mu_m \mu_m), \frac{kN_m}{\mu_m \varphi} (\varphi \eta_m - \mu_m \eta_m - \mu_m \mu_m), 0 \right\} \\ E_0 &= \left\{ \frac{\mu_h^* N_h}{(p + \mu_h)}, \frac{p \mu_h^* N_h}{(p + \mu_h)(\mu_h + \gamma_h)}, 0, \frac{kN_m \mathcal{M}}{\varphi \eta_m}, \frac{kN_m \mathcal{M}}{\mu_m \varphi}, 0 \right\} \end{aligned}$$

4.3.2 Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik digunakan untuk menunjukkan bahwa dalam populasi terjadi penyebaran penyakit (dalam hal ini virus) sehingga $I_h \neq 0$ dan $I_m \neq 0$.

Untuk memperoleh titik kesetimbangan endemik akan dinyatakan ruas kiri pada Persamaan (4.11) sampai (4.16) bernilai nol sehingga $\frac{dS_h}{dt} = 0$, $\frac{dE_h}{dt} = 0$, $\frac{dI_h}{dt} = 0$, $\frac{dA_m}{dt} = 0$, $\frac{dS_m}{dt} = 0$, dan $\frac{dI_m}{dt} = 0$. Kemudian mensubstitusikan sehingga diperoleh $E_0^* = (S_h^*, E_h^*, I_h^*, A_m^*, S_m^*, I_m^*)$.

Pertama-tama akan dicari nilai S_h^* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_h}{dt} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \mu_h^* N_h - \left(B\beta_h \frac{I_m}{N_h} + p + \mu_h \right) S_h &= 0 \\
 \Leftrightarrow \mu_h^* N_h &= \left(B\beta_h \frac{I_m}{N_h} + p + \mu_h \right) S_h \\
 \Leftrightarrow S_h &= \frac{\mu_h^* N_h}{B\beta_h \frac{I_m}{N_h} + p + \mu_h} \\
 \Leftrightarrow S_h &= \frac{\mu_h^* N_h}{\frac{B\beta_h I_m + pN_h + \mu_h N_h}{N_h}} \\
 \Leftrightarrow S_h &= \frac{\mu_h^* N_h^2}{B\beta_h I_m + pN_h + \mu_h N_h} \\
 S_h^* &= \frac{\mu_h^* N_h^2}{B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h} \tag{4.29}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya akan dicari nilai E_h^*

$$\begin{aligned}
 \frac{dE_h}{dt} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \left(B\beta_h \frac{I_m}{N_h} + p \right) S_h - (\mu_h + \gamma_h) E_h &= 0 \\
 \Leftrightarrow \left(B\beta_h \frac{I_m}{N_h} + p \right) S_h &= (\mu_h + \gamma_h) E_h \tag{4.30}
 \end{aligned}$$

substitusikan persamaan (4.29) ke persamaan (4.30) maka menjadi

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \left(B\beta_h \frac{I_m}{N_h} + p \right) \left(\frac{\mu_h^* N_h^2}{B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h} \right) &= (\mu_h + \gamma_h) E_h^* \\
 \Leftrightarrow E_h^* &= \left(\frac{B\beta_h I_m^* + pN_h}{N_h (\mu_h + \gamma_h)} \right) \left(\frac{\mu_h^* N_h^2}{B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h} \right) \\
 E_h^* &= \left(\frac{B\beta_h I_m^* + pN_h}{(\mu_h + \gamma_h)} \right) \left(\frac{\mu_h^* N_h}{B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h} \right) \tag{4.31}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya akan dicari nilai I_h^*

$$\frac{dI_h}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma_h E_h - (\eta_h + \mu_h) I_h = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma_h E_h = (\eta_h + \mu_h) I_h$$

$$\Leftrightarrow I_h = \frac{\gamma_h E_h}{(\eta_h + \mu_h)} \quad (4.32)$$

substitusikan persamaan (4.31) ke persamaan (4.32) maka menjadi

$$I_h^* = \frac{\gamma_h}{(\eta_h + \mu_h)} \left(\frac{B\beta_h I_m^* + pN_h}{(\mu_h + \gamma_h)} \right) \left(\frac{\mu_h^* N_h}{B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h} \right) \quad (4.33)$$

Selanjutnya akan dicari nilai I_m^*

$$\frac{dI_m}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow B\beta_m \frac{I_h}{N_h} S_m - \mu_m I_m = 0$$

$$\Leftrightarrow B\beta_m \frac{I_h}{N_h} S_m = \mu_m I_m$$

$$\Leftrightarrow S_m^* = \frac{\mu_m I_m^* N_h}{B\beta_m I_h^*} \quad (4.34)$$

substitusikan persamaan (4.33) ke (4.34) maka menjadi

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow S_m^* &= \frac{\mu_m I_m^* N_h}{B\beta_m \left(\frac{\gamma_h}{(\eta_h + \mu_h)} \left(\frac{B\beta_h I_m^* + pN_h}{(\mu_h + \gamma_h)} \right) \left(\frac{bN_h}{B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h} \right) \right)} \\ \Leftrightarrow S_m^* &= \frac{\mu_m I_m^* N_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h)}{\mu_h^* N_h \gamma_h B\beta_m (B\beta_h I_m^* + pN_h)} \\ S_m^* &= \frac{\mu_m I_m^* (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h)}{\mu_h^* \gamma_h B\beta_m (B\beta_h I_m^* + pN_h)} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Selanjutnya akan dicari nilai S_m^*

$$\frac{dS_m}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta_m A_m - \left(B\beta_m \frac{I_h}{N_h} + \mu_m \right) S_m = 0$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \eta_m A_m &= \left(B\beta_m \frac{I_h}{N_h} + \mu_m \right) S_m \\
\Leftrightarrow \eta_m A_m &= \left(\frac{B\beta_m I_h + \mu_m N_h}{N_h} \right) S_m \\
\Leftrightarrow A_m^* &= \left(\frac{B\beta_m I_h^* + \mu_m N_h}{\eta_m N_h} \right) S_m^* \quad (4.36)
\end{aligned}$$

substitusikan persamaan (4.35) ke persamaan (4.36) maka menjadi

$$\Leftrightarrow A_m^* = \left(\frac{B\beta_m I_m^* + \mu_m N_h}{\eta_m N_h} \right) \left(\frac{\mu_m I_m^* (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h)}{\mu_h^* \gamma_h B\beta_m (B\beta_h I_m^* + pN_h)} \right)$$

substitusikan (4.33) ke (4.36) maka menjadi

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow A_m^* &= \left(\frac{B\beta_m \left(\frac{\gamma_h}{(\eta_h + \mu_h)} \left(\frac{B\beta_h I_m^* + pN_h}{(\mu_h + \gamma_h)} \right) \left(\frac{\mu_h^* N_h}{B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h} \right) \right) + \mu_m N_h}{\eta_m N_h} \right) \\
&\quad \left(\frac{\mu_m I_m^* (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h)}{\mu_h^* \gamma_h B\beta_m (B\beta_h I_m^* + pN_h)} \right) \\
\Leftrightarrow A_m^* &= \frac{\mu_h^* N_h B\beta_m \gamma_h (B\beta_h I_m^* + pN_h) + \mu_m N_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h)}{\eta_m N_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h)} \\
&\quad \left(\frac{\mu_m I_m^* (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h)}{\mu_h^* \gamma_h B\beta_m (B\beta_h I_m^* + pN_h)} \right) \\
A_m^* &= \mu_m I_m^* \mu_h^* B\beta_m \gamma_h \frac{(B\beta_h I_m^* + pN_h)}{\eta_m \mu_h^* \gamma_h B\beta_m (B\beta_h I_m^* + pN_h)} + \mu_m^2 I_m^* (\eta_h + \mu_h) \frac{(\mu_h + \gamma_h) (B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h)}{\eta_m \mu_h^* \gamma_h B\beta_m (B\beta_h I_m^* + pN_h)} \quad (4.37)
\end{aligned}$$

Selanjutnya akan dicari nilai A_m^*

$$\frac{dA_m}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi \left(1 - \frac{A_m}{kN_m}\right) (S_m + I_m) - (\eta_m + \mu_m)A_m = 0 \quad (4.38)$$

substitusikan persamaan (4.36) dan (4.37) ke persamaan (4.38) maka menjadi

$$\begin{aligned} & \varphi \left(1 - \frac{\left(\frac{\mu_m I_m^* (\mu_h^* B \beta_m \gamma_h (B \beta_h I_m^* + pN_h) + \mu_m (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (B \beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h))}{\eta_m \mu_h^* \gamma_h B \beta_m (B \beta_h I_m^* + pN_h)}\right)}{kN_m}\right) \\ & \left(\frac{\mu_m I_m^* (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (B \beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h)}{\mu_h^* \gamma_h B \beta_m (B \beta_h I_m^* + pN_h)} + I_m^*\right) - (\eta_m + \\ & \mu_m) \frac{\mu_m I_m^* (\mu_h^* B \beta_m \gamma_h (B \beta_h I_m^* + pN_h) + \mu_m (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (B \beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h))}{\eta_m \mu_h^* \gamma_h B \beta_m (B \beta_h I_m^* + pN_h)} = \\ & 0 \\ & \Leftrightarrow \varphi \left(\frac{kN_m \eta_m \mu_h^* \gamma_h B \beta_m (B \beta_h I_m^* + pN_h)}{kN_m \eta_m \mu_h^* \gamma_h B \beta_m (B \beta_h I_m^* + pN_h)} - \right. \\ & \left. \frac{\left(\mu_m I_m^* (\mu_h^* B \beta_m \gamma_h (B \beta_h I_m^* + pN_h) + \mu_m (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (B \beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h))\right)}{kN_m \eta_m \mu_h^* \gamma_h B \beta_m (B \beta_h I_m^* + pN_h)}\right) \\ & \left(\frac{\mu_m I_m^* (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (B \beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h) + I_m^* (\mu_h^* \gamma_h B \beta_m (B \beta_h I_m^* + pN_h))}{\mu_h^* \gamma_h B \beta_m (B \beta_h I_m^* + pN_h)}\right) - \\ & \frac{(\eta_m + \mu_m) \mu_m I_m^* (\mu_h^* B \beta_m \gamma_h (B \beta_h I_m^* + pN_h) + \mu_m (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (B \beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h))}{\eta_m \mu_h^* \gamma_h B \beta_m (B \beta_h I_m^* + pN_h)} = \\ & 0 \\ & \Leftrightarrow \varphi \left(\mu_m I_m^* (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (B \beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h) + \right. \\ & I_m^* (\mu_h^* \gamma_h B \beta_m (B \beta_h I_m^* + \\ & pN_h)) \left. \right) \left(\frac{kN_h \eta_m \mu_h^* \gamma_h B \beta_m (B \beta_h I_m^* + pN_h)}{k \eta_m N_h (\mu_h^* \gamma_h B \beta_m (B \beta_h I_m^* + pN_h))^2} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu_m I_m^* (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h) + I_m^* (\mu_h^* \gamma_h B\beta_m (B\beta_h I_m^* + pN_h))}{k\eta_m N_m (\mu_h^* \gamma_h B\beta_m (B\beta_h I_m^* + pN_h))^2} \Bigg) - \\
& (\eta_m + \mu_m) \mu_m I_m^* kN_m \eta_m \mu_h^* \gamma_h B\beta_m (B\beta_h I_m^* + pN_h) \frac{(\mu_h^* B\beta_m \gamma_h (B\beta_h I_m^* + pN_h) + \mu_m (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h))}{k\eta_m N_m (\mu_h^* \gamma_h B\beta_m (B\beta_h I_m^* + pN_h))^2} = \\
& 0 \\
\Rightarrow & \left(\mu_m I_m^* (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h) + \right. \\
& \left. I_m^* ((\eta_m + \mu_m) \gamma_h B\beta_m (B\beta_h I_m^* + pN_h)) \right) \left(kN_m \eta_m \mu_h^* \gamma_h B\beta_m (B\beta_h I_m^* + pN_h) - \mu_m I_m^* (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h) + \right. \\
& \left. I_m^* (\mu_h^* \gamma_h B\beta_m (B\beta_h I_m^* + pN_h)) \right) - \\
& (\eta_m + \mu_m) \mu_m I_m^* kN_m \eta_m \mu_h^* \gamma_h B\beta_m (B\beta_h I_m^* + pN_h) (\mu_h^* B\beta_m \gamma_h (B\beta_h I_m^* + pN_h) + \mu_m (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h)) = 0 \\
\Rightarrow & \left(-\varphi \mu_m^2 B^3 \beta_h^2 \beta_m b \gamma_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) - \right. \\
& \varphi \mu_m \mu_h^{*2} N_h B^4 \beta_h^2 \beta_m^2 \gamma_h^2) I_m^{*4} + \left(-\varphi \mu_m^2 B^2 \beta_h \beta_m \mu_h^* \gamma_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (pN_h + \mu_h N_h) - 2\varphi \mu_m \mu_h^{*2} N_h^2 p B^3 \beta_h \beta_m^2 \gamma_h^2 + \right. \\
& \varphi k N_h \eta_m \mu_m \mu_h^* B^3 \beta_h \beta_m^2 \gamma_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) + \varphi k N_h^2 \eta_m \mu_h^{*2} B^4 \beta_h^2 \beta_m^2 \gamma_h^2 - \varphi \mu_m^2 \mu_h^* B^2 \beta_h \beta_m \gamma_h p N_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) - \mu_m \mu_h^{*2} k N_h B^4 \beta_h \beta_m^2 \gamma_h^2 (\eta_m + \mu_m) - \\
& \mu_m^2 \mu_h^* B^3 \beta_h^2 \beta_m \gamma_h k N_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (\eta_m + \mu_m) \Big) I_m^{*3} + \\
& \left(\varphi k N_h \mu_m \mu_h^* B^2 \beta_h \beta_m \gamma_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (pN_h + \mu_h N_h) + \right. \\
& 2\varphi p k N_h^3 \eta_m \mu_h^{*2} B^3 \beta_h \beta_m^2 \gamma_h^2 - \varphi \mu_m^2 \mu_h^{*2} B\beta_m \gamma_h p N_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) - \varphi \mu_m \mu_h^{*2} N_h^3 p^2 B^2 \beta_m^2 \gamma_h^2 + \\
& \varphi k N_h^2 \eta_m \mu_m \mu_h^* B^2 \beta_m \beta_m \gamma_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) + \varphi \mu_m^2 B\beta_h (\eta_h + \mu_h)^2 (\mu_h + \gamma_h)^2 (pN_h + \mu_h N_h) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varphi N_h \mu_m \mu_h^* B^2 \beta_h \beta_m \gamma_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (p N_h + \mu_h N_h) - \\
& 2 \mu_m \mu_h^{*2} N_h^2 k p B^3 \beta_m^2 \beta_h \gamma_h^2 (\eta_m + \mu_m) - \\
& \mu_m^2 \mu_h^* N_h^2 k p B^2 \beta_h \beta_m \gamma_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (\eta_m + \mu_m) - \\
& \mu_m^2 \mu_h^* N_h k B^2 \beta_h \beta_m \gamma_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (\eta_m + \mu_m) (p N_h + \\
& \mu_h N_h) \Big) I_m^{*2} + \Big(\varphi k N_h^2 p \eta_m \mu_m b B \beta_m \gamma_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \\
& \gamma_h) (p N_h + \mu_h N_h) + \varphi k N_h^4 p^2 \eta_m \mu_h^{*2} B^2 \beta_m^2 \beta_m^2 \gamma_h^2 + \\
& \varphi \mu_m^2 (\eta_h + \mu_h)^2 (\mu_h + \gamma_h)^2 (p N_h + \mu_h N_h)^2 + \\
& \varphi \mu_m \mu_h^* N_h^2 p B \beta_m \gamma_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (p N_h + \mu_h N_h) - \\
& \mu_m^2 \mu_h^{*2} N_h k B^2 \beta_m^2 \gamma_h^2 (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (\eta_m + \mu_m) (p N_h)^3 - \\
& k p^2 \mu_m^2 \mu_h^{*3} N_h^4 B^2 \beta_m^2 \gamma_h^2 (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (\eta_m + \mu_m) \Big) I_m^* = 0
\end{aligned}$$

dapat dimisalkan dengan

$$\begin{aligned}
A &= \left(-\varphi \mu_m^2 B^3 \beta_h^2 \beta_m \mu_h^* \gamma_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) - \right. \\
& \quad \left. \varphi \mu_m \mu_h^{*2} N_h B^4 \beta_h^2 \beta_m^2 \gamma_h^2 \right) \\
B &= \left(-\varphi \mu_m^2 B^2 \beta_h \beta_m \mu_h^* \gamma_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (p N_h + \mu_h N_h) - \right. \\
& \quad 2 \varphi \mu_m \mu_h^{*2} N_h^2 p B^3 \beta_h \beta_m^2 \gamma_h^2 + \varphi k N_h \eta_m \mu_m \mu_h^* B^3 \beta_h \beta_m^2 \gamma_h (\eta_h + \\
& \quad \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) + \varphi k N_h^2 \eta_m \mu_h^{*2} B^4 \beta_h^2 \beta_m^2 \gamma_h^2 - \\
& \quad \varphi \mu_m^2 \mu_h^* B^2 \beta_h \beta_m \gamma_h p N_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) - \\
& \quad \mu_m \mu_h^{*2} k N_h B^4 \beta_h \beta_m^2 \gamma_h^2 (\eta_m + \mu_m) - \\
& \quad \left. \mu_m^2 \mu_h^* B^3 \beta_h^2 \beta_m \gamma_h k N_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (\eta_m + \mu_m) \right) \\
C &= \left(\varphi k N_h \mu_m \mu_h^* B^2 \beta_h \beta_m \gamma_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (p N_h + \right. \\
& \quad \mu_h N_h) + 2 \varphi p k N_h^3 \eta_m \mu_h^{*2} B^3 \beta_h \beta_m^2 \gamma_h^2 - \\
& \quad \varphi \mu_m^2 \mu_h^* B \beta_m \gamma_h p N_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) - \\
& \quad \varphi \mu_m \mu_h^{*2} N_h^3 p^2 B^2 \beta_m^2 \gamma_h^2 + \varphi k N_h^2 \eta_m \mu_m \mu_h^* B^2 \beta_m \beta_m \gamma_h (\eta_h + \\
& \quad \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) + \varphi \mu_m^2 B \beta_h (\eta_h + \mu_h)^2 (\mu_h + \gamma_h)^2 (p N_h + \\
& \quad \mu_h N_h) + \varphi N_h \mu_m \mu_h^* B^2 \beta_h \beta_m \gamma_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (p N_h + \\
& \quad \mu_h N_h) - 2 \mu_m \mu_h^{*2} N_h^2 k p B^3 \beta_m^2 \beta_h \gamma_h^2 (\eta_m + \mu_m) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mu_m^2 \mu_h^* N_h^2 k p B^2 \beta_h \beta_m \gamma_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (\eta_m + \mu_m) - \\
& \mu_m^2 \mu_h^* N_h k B^2 \beta_h \beta_m \gamma_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (\eta_m + \mu_m) (p N_h + \\
& \mu_h N_h) \Big) \\
D = & \Big(\varphi k N_h^2 p \eta_m \mu_m \mu_h^* B \beta_m \gamma_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (p N_h + \\
& \mu_h N_h) + \varphi k N_h^4 p^2 \eta_m \mu_h^{*2} B^2 \beta_m^2 \gamma_h^2 + \varphi \mu_m^2 (\eta_h + \mu_h)^2 (\mu_h + \\
& \gamma_h)^2 (p N_h + \mu_h N_h)^2 + \varphi \mu_m \mu_h^* N_h^2 p B \beta_m \gamma_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \\
& \gamma_h) (p N_h + \mu_h N_h) - \mu_m^2 \mu_h^{*2} N_h k B^2 \beta_m^2 \gamma_h^2 (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \\
& \gamma_h) (\eta_m + \mu_m) (p N_h)^3 - k p^2 \mu_m^2 \mu_h^{*3} N_h^4 B^2 \beta_m^2 \gamma_h^2 (\eta_h + \\
& \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (\eta_m + \mu_m) \Big)
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut

$$f(I_m^*) = A I_m^{*4} + B I_m^{*3} + C I_m^{*2} + D I_m^* = 0$$

$$f(I_m^*) = (A I_m^{*3} + B I_m^{*2} + C I_m^* + D) I_m^* = 0 \quad (4.39)$$

dari persamaan (4.39) maka diperoleh I_m^* sebagai berikut

$$I_{m_1}^* = 0$$

$$I_{m_2}^* = -\frac{B}{3A}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}(-B^2 + 3AC)}{3A(-2B^3 + 9ABC - 27A^2D + \sqrt{4(-B^2 + 3AC)^3 + (-2B^3 + 9ABC - 27A^2D)^2})^{\frac{1}{3}}} + \\
& \frac{(-2B^3 + 9ABC - 27A^2D + \sqrt{4(-B^2 + 3AC)^3 + (-2B^3 + 9ABC - 27A^2D)^2})^{\frac{1}{3}}}{3x2^{\frac{1}{3}}A} \\
I_{m_3}^* = & -\frac{B}{3A} + \left((1 + i\sqrt{3})(-B^2 + 3AC) \right) / \left(3x2^{\frac{2}{3}}A(-2B^3 + 9ABC - \right. \\
& \left. 27A^2D + \sqrt{4(-B^2 + 3AC)^3 + (-2B^3 + 9ABC - 27A^2D)^2})^{\frac{1}{3}} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6x2^{\frac{1}{3}}A} \Bigg) \left(1 - \right. \\
& i\sqrt{3} \Bigg) \left(-2B^3 + 9ABC - 27A^2D + \right. \\
& \left. \sqrt{4(-B^2 + 3AC)^3 + (-2B^3 + 9ABC - 27A^2D)^2} \right)^{\frac{1}{3}} \\
& I_{m_4}^* \\
& = -\frac{B}{3A} \\
& + \left((1 + i\sqrt{3})(-B^2 + 3AC) \right) \\
& / \left(3x2^{\frac{2}{3}}A \left(-2B^3 + 9ABC - 27A^2D \right. \right. \\
& \left. \left. + \sqrt{4(-B^2 + 3AC)^3 + (-2B^3 + 9ABC - 27A^2D)^2} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{6x2^{\frac{1}{3}}A} \right) \left(1 \right. \\
& \left. + i\sqrt{3} \right) \left(-2B^3 + 9ABC - 27A^2D \right. \\
& \left. + \sqrt{4(-B^2 + 3AC)^3 + (-2B^3 + 9ABC - 27A^2D)^2} \right)^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

karena nilai $I_m^* \neq 0$ maka $I_{m_1}^* = 0$ bukan titik kesetimbangan endemik,

saat $I_{m_2}^* > 0$

$$\begin{aligned}
& \text{jika } \frac{B}{3A} > \frac{\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}(-B^2 + 3AC)}{3A \left(-2B^3 + 9ABC - 27A^2D + \sqrt{4(-B^2 + 3AC)^3 + (-2B^3 + 9ABC - 27A^2D)^2} \right)^{\frac{1}{3}} -} \\
& \left(-2B^3 + 9ABC - 27A^2D + \sqrt{4(-B^2 + 3AC)^3 + (-2B^3 + 9ABC - 27A^2D)^2} \right)^{\frac{1}{3}} \\
& \frac{3x2^{\frac{1}{3}}A}{\phantom{3x2^{\frac{1}{3}}A}}
\end{aligned}$$

saat $I_{m_3}^*$ dan $I_{m_4}^*$ memiliki nilai imajiner maka nilai $I_{m_3}^*$ dan $I_{m_4}^*$ bukan titik kesetimbangan endemik.

Berdasarkan hasil perhitungan titik kesetimbangan endemik maka diperoleh nilai $E_0^* = (S_h^*, E_h^*, I_h^*, A_m^*, S_m^*, I_m^*)$ pada persamaan (4.29), (4.31), (4.33), (4.35), (4.37)

4.4 Kestabilan Lokal Model Interaksi Dinamis

Setelah diperoleh titik kesetimbangan maka dilakukan analisis kestabilan. Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui laju penyebaran suatu penyakit. Analisis ini dilakukan pada titik setimbang bebas penyakit (*Disease Free Equilibrium*) dan titik setimbang endemik (*Endemic Equilibrium*).

Model interaksi dinamis merupakan model persamaan yang tak linier, sehingga perlu dilakukan linierisasi terlebih dahulu sebelum melakukan analisis kestabilan. Untuk melakukan linierisasi digunakan ekspansi deret Taylor, pada persamaan (4.11) sampai (4.16) sehingga dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_h}{dt} &= A(S_h, E_h, I_h, A_m, S_m, I_m) \\
 &= \mu_h^* N_h - B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m - pS_h - \mu_h S_h \\
 \frac{dE_h}{dt} &= B(S_h, E_h, I_h, A_m, S_m, I_m) \\
 &= B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m + pS_h - (\mu_h + \gamma_h) E_h \\
 \frac{dI_h}{dt} &= C(S_h, E_h, I_h, A_m, S_m, I_m) \\
 &= \gamma_h E_h - (\eta_h + \mu_h) I_h \\
 \frac{dA_m}{dt} &= D(S_h, E_h, I_h, A_m, S_m, I_m) \\
 &= \varphi \left(1 - \frac{A_m}{kN_m} \right) (S_m + I_m) - (\eta_m + \mu_m) A_m \\
 \frac{dS_m}{dt} &= E(S_h, E_h, I_h, A_m, S_m, I_m) \\
 &= \eta_m A_m - \left(B\beta_m \frac{I_h}{N_h} + \mu_m \right) S_m \\
 \frac{dI_m}{dt} &= F(S_h, E_h, I_h, A_m, S_m, I_m) \\
 &= B\beta_m \frac{I_h}{N_h} S_m - \mu_m I_m
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Dengan titik tetap $(S_h^0, E_h^0, I_h^0, A_m^0, S_m^0, I_m^0)$ maka

$$\begin{aligned}
\frac{dS_h}{dt} &= A(S_h^0, E_h^0, I_h^0, A_m^0, S_m^0, I_m^0) = 0 \\
\frac{dE_h}{dt} &= B(S_h^0, E_h^0, I_h^0, A_m^0, S_m^0, I_m^0) = 0 \\
\frac{dI_h}{dt} &= C(S_h^0, E_h^0, I_h^0, A_m^0, S_m^0, I_m^0) = 0 \\
\frac{dA_m}{dt} &= D(S_h^0, E_h^0, I_h^0, A_m^0, S_m^0, I_m^0) = 0 \\
\frac{dS_m}{dt} &= E(S_h^0, E_h^0, I_h^0, A_m^0, S_m^0, I_m^0) = 0 \\
\frac{dI_m}{dt} &= F(S_h^0, E_h^0, I_h^0, A_m^0, S_m^0, I_m^0) = 0
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Misalkan :

$$\begin{aligned}
S_h - S_h^0 &= a \Rightarrow \dot{S}_h = \dot{a} \\
E_h - E_h^0 &= b \Rightarrow \dot{E}_h = \dot{b} \\
I_h - I_h^0 &= c \Rightarrow \dot{I}_h = \dot{c} \\
A_m - A_m^0 &= d \Rightarrow \dot{A}_m = \dot{d} \\
S_m - S_m^0 &= e \Rightarrow \dot{S}_m = \dot{e} \\
I_m - I_m^0 &= g \Rightarrow \dot{I}_m = \dot{g}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Deret Taylor dari sistem (4.40) disekitar titik tetap $(S_h^0, E_h^0, I_h^0, A_m^0, S_m^0, I_m^0)$ adalah

$$\begin{aligned}
\frac{dS_h}{dt} &= A(S_h^0, E_h^0, I_h^0, A_m^0, S_m^0, I_m^0) + (S_h - S_h^0) \frac{\partial A}{\partial S} + (E_h - E_h^0) \frac{\partial A}{\partial E} + \dots \\
\frac{dE_h}{dt} &= B(S_h^0, E_h^0, I_h^0, A_m^0, S_m^0, I_m^0) + (S_h - S_h^0) \frac{\partial B}{\partial S} + (E_h - E_h^0) \frac{\partial B}{\partial E} + \dots \\
\frac{dI_h}{dt} &= C(S_h^0, E_h^0, I_h^0, A_m^0, S_m^0, I_m^0) + (S_h - S_h^0) \frac{\partial C}{\partial S} + (E_h - E_h^0) \frac{\partial C}{\partial E} + \dots \\
\frac{dA_m}{dt} &= D(S_h^0, E_h^0, I_h^0, A_m^0, S_m^0, I_m^0) + (S_h - S_h^0) \frac{\partial D}{\partial S} + (E_h - E_h^0) \frac{\partial D}{\partial E} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dS_m}{dt} &= \mathbf{E}(S_h^0, E_h^0, I_h^0, A_m^0, S_m^0, I_m^0) + (S_h - S_h^0) \frac{\partial E}{\partial S} + (E_h - E_h^0) \frac{\partial E}{\partial E} + \dots \\ \frac{dI_m}{dt} &= \mathbf{F}(S_h^0, E_h^0, I_h^0, A_m^0, S_m^0, I_m^0) + (S_h - S_h^0) \frac{\partial F}{\partial S} + (E_h - E_h^0) \frac{\partial F}{\partial E} + \dots\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (4.41), maka linearisasi dari sistem (4.40) adalah

$$\begin{aligned}\frac{dS_h}{dt} &= (S_h - S_h^0) \frac{\partial A}{\partial S} + (E_h - E_h^0) \frac{\partial A}{\partial E} + (I_h - I_h^0) \frac{\partial A}{\partial S} + \\ &\quad (A_m - A_m^0) \frac{\partial A}{\partial S} + (S_m - S_m^0) \frac{\partial A}{\partial S} + (I_m - I_m^0) \frac{\partial A}{\partial S} \\ \frac{dE_h}{dt} &= (S_h - S_h^0) \frac{\partial B}{\partial S} + (E_h - E_h^0) \frac{\partial B}{\partial E} + (I_h - I_h^0) \frac{\partial B}{\partial S} + \\ &\quad (A_m - A_m^0) \frac{\partial B}{\partial S} + (S_m - S_m^0) \frac{\partial B}{\partial S} + (I_m - I_m^0) \frac{\partial B}{\partial S} \\ \frac{dI_h}{dt} &= (S_h - S_h^0) \frac{\partial C}{\partial S} + (E_h - E_h^0) \frac{\partial C}{\partial E} + (I_h - I_h^0) \frac{\partial C}{\partial S} + \\ &\quad (A_m - A_m^0) \frac{\partial C}{\partial S} + (S_m - S_m^0) \frac{\partial C}{\partial S} + (I_m - I_m^0) \frac{\partial C}{\partial S} \\ \frac{dA_m}{dt} &= (S_h - S_h^0) \frac{\partial D}{\partial S} + (E_h - E_h^0) \frac{\partial D}{\partial E} + (I_h - I_h^0) \frac{\partial D}{\partial S} + \\ &\quad (A_m - A_m^0) \frac{\partial D}{\partial S} + (S_m - S_m^0) \frac{\partial D}{\partial S} + (I_m - I_m^0) \frac{\partial D}{\partial S} \\ \frac{dS_m}{dt} &= (S_h - S_h^0) \frac{\partial E}{\partial S} + (E_h - E_h^0) \frac{\partial E}{\partial E} + (I_h - I_h^0) \frac{\partial E}{\partial S} + \\ &\quad (A_m - A_m^0) \frac{\partial E}{\partial S} + (S_m - S_m^0) \frac{\partial E}{\partial S} + (I_m - I_m^0) \frac{\partial E}{\partial S} \\ \frac{dI_m}{dt} &= (S_h - S_h^0) \frac{\partial F}{\partial S} + (E_h - E_h^0) \frac{\partial F}{\partial E} + (I_h - I_h^0) \frac{\partial F}{\partial S} + \\ &\quad (A_m - A_m^0) \frac{\partial F}{\partial S} + (S_m - S_m^0) \frac{\partial F}{\partial S} + (I_m - I_m^0) \frac{\partial F}{\partial S}\end{aligned}$$

Dengan menggunakan permisalan (4.42), maka hasil linearisasi dari sistem (4.40) seperti yang tertulis tersebut menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{dS_h}{dt} &= a \frac{\partial A}{\partial S_h} + b \frac{\partial A}{\partial E_h} + c \frac{\partial A}{\partial I_h} + d \frac{\partial A}{\partial A_m} + e \frac{\partial A}{\partial S_m} + g \frac{\partial A}{\partial I_m} \\ \frac{dE_h}{dt} &= a \frac{\partial B}{\partial S_h} + b \frac{\partial B}{\partial E_h} + c \frac{\partial B}{\partial I_h} + d \frac{\partial B}{\partial A_m} + e \frac{\partial B}{\partial S_m} + g \frac{\partial B}{\partial I_m} \\ \frac{dI_h}{dt} &= a \frac{\partial C}{\partial S_h} + b \frac{\partial C}{\partial E_h} + c \frac{\partial C}{\partial I_h} + d \frac{\partial C}{\partial A_m} + e \frac{\partial C}{\partial S_m} + g \frac{\partial C}{\partial I_m}\end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dA_m}{dt} &= a \frac{\partial D}{\partial S_h} + b \frac{\partial D}{\partial E_h} + c \frac{\partial D}{\partial I_h} + d \frac{\partial D}{\partial A_m} + e \frac{\partial D}{\partial S_m} + g \frac{\partial D}{\partial I_m} \\
\frac{dS_m}{dt} &= a \frac{\partial E}{\partial S_h} + b \frac{\partial E}{\partial E_h} + c \frac{\partial E}{\partial I_h} + d \frac{\partial E}{\partial A_m} + e \frac{\partial E}{\partial S_m} + g \frac{\partial E}{\partial I_m} \\
\frac{dI_m}{dt} &= a \frac{\partial F}{\partial S_h} + b \frac{\partial F}{\partial E_h} + c \frac{\partial F}{\partial I_h} + d \frac{\partial F}{\partial A_m} + e \frac{\partial F}{\partial S_m} + g \frac{\partial F}{\partial I_m}
\end{aligned}$$

Persamaan (4.43) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{dS_h}{dt} \\ \frac{dE_h}{dt} \\ \frac{dI_h}{dt} \\ \frac{dA_m}{dt} \\ \frac{dS_m}{dt} \\ \frac{dI_m}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial S_h} & \frac{\partial A}{\partial E_h} & \frac{\partial A}{\partial I_h} & \frac{\partial A}{\partial A_m} & \frac{\partial A}{\partial S_m} & \frac{\partial A}{\partial I_m} \\ \frac{\partial B}{\partial S_h} & \frac{\partial B}{\partial E_h} & \frac{\partial B}{\partial I_h} & \frac{\partial B}{\partial A_m} & \frac{\partial B}{\partial S_m} & \frac{\partial B}{\partial I_m} \\ \frac{\partial C}{\partial S_h} & \frac{\partial C}{\partial E_h} & \frac{\partial C}{\partial I_h} & \frac{\partial C}{\partial A_m} & \frac{\partial C}{\partial S_m} & \frac{\partial C}{\partial I_m} \\ \frac{\partial D}{\partial S_h} & \frac{\partial D}{\partial E_h} & \frac{\partial D}{\partial I_h} & \frac{\partial D}{\partial A_m} & \frac{\partial D}{\partial S_m} & \frac{\partial D}{\partial I_m} \\ \frac{\partial E}{\partial S_h} & \frac{\partial E}{\partial E_h} & \frac{\partial E}{\partial I_h} & \frac{\partial E}{\partial A_m} & \frac{\partial E}{\partial S_m} & \frac{\partial E}{\partial I_m} \\ \frac{\partial F}{\partial S_h} & \frac{\partial F}{\partial E_h} & \frac{\partial F}{\partial I_h} & \frac{\partial F}{\partial A_m} & \frac{\partial F}{\partial S_m} & \frac{\partial F}{\partial I_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ g \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari matriks Jacobian dari sistem (4.40) dengan mendiferensialkannya sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial S_h} &= \frac{\partial}{\partial S_h} \left(\mu_h^* N_h - B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m - pS_h - \mu_h S_h \right) \\
&= - \left(B\beta_h \frac{I_m}{N_h} + p + \mu_h \right)
\end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial E_h} &= \frac{\partial}{\partial E_h} \left(\mu_h^* N_h - B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m - pS_h - \mu_h S_h \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial I_h} &= \frac{\partial}{\partial I_h} \left(\mu_h^* N_h - B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m - pS_h - \mu_h S_h \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial A_m} &= \frac{\partial}{\partial A_m} \left(\mu_h^* N_h - B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m - pS_h - \mu_h S_h \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial S_m} &= \frac{\partial}{\partial S_m} \left(\mu_h^* N_h - B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m - pS_h - \mu_h S_h \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial I_m} &= \frac{\partial}{\partial I_m} \left(\mu_h^* N_h - B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m - pS_h - \mu_h S_h \right) \\ &= -\frac{B\beta_h S_h}{N_h}\end{aligned}\quad (4.49)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial S_h} &= \frac{\partial}{\partial S_h} \left(B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m + pS_h - (\mu_h + \gamma_h) E_h \right) \\ &= \frac{B\beta_h}{N_h} I_m + p\end{aligned}\quad (4.50)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial E_h} &= \frac{\partial}{\partial E_h} \left(B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m + pS_h - (\mu_h + \gamma_h) E_h \right) \\ &= -(\mu_h + \gamma_h)\end{aligned}\quad (4.51)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial I_h} &= \frac{\partial}{\partial I_h} \left(B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m + pS_h - (\mu_h + \gamma_h) E_h \right) \\ &= 0\end{aligned}\quad (4.52)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial A_m} &= \frac{\partial}{\partial A_m} \left(B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m + pS_h - (\mu_h + \gamma_h) E_h \right) \\ &= 0\end{aligned}\quad (4.53)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial S_m} &= \frac{\partial}{\partial S_m} \left(B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m + pS_h - (\mu_h + \gamma_h) E_h \right) \\ &= 0\end{aligned}\quad (4.54)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial I_m} &= \frac{\partial}{\partial I_m} \left(B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m + pS_h - (\mu_h + \gamma_h) E_h \right) \\ &= \frac{B\beta_h S_h}{N_h}\end{aligned}\quad (4.55)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial S_h} &= \frac{\partial}{\partial S_h} (\gamma_h E_h - (\eta_h + \mu_h) I_h) \\ &= 0\end{aligned}\quad (4.56)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial E_h} &= \frac{\partial}{\partial E_h} (\gamma_h E_h - (\eta_h + \mu_h) I_h) \\ &= \gamma_h\end{aligned}\quad (4.57)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial I_h} &= \frac{\partial}{\partial I_h} (\gamma_h E_h - (\eta_h + \mu_h) I_h) \\ &= -(\eta_h + \mu_h)\end{aligned}\quad (4.58)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial A_m} &= \frac{\partial}{\partial A_m} (\gamma_h E_h - (\eta_h + \mu_h) I_h) \\ &= 0\end{aligned}\quad (4.59)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial S_m} &= \frac{\partial}{\partial S_m} (\gamma_h E_h - (\eta_h + \mu_h) I_h) \\ &= 0\end{aligned}\quad (4.60)$$

$$\frac{\partial C}{\partial I_m} = \frac{\partial}{\partial I_m} (\gamma_h E_h - (\eta_h + \mu_h) I_h)$$

$$= 0 \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial D}{\partial S_h} = \frac{\partial}{\partial S_h} \varphi \left(1 - \frac{A_m}{kN_m} \right) (S_m + I_m) - (\eta_m + \mu_m) A_m$$

$$= 0 \quad (4.62)$$

$$\frac{\partial D}{\partial E_h} = \frac{\partial}{\partial E_h} \varphi \left(1 - \frac{A_m}{kN_m} \right) (S_m + I_m) - (\eta_m + \mu_m) A_m$$

$$= 0 \quad (4.63)$$

$$\frac{\partial D}{\partial I_h} = \frac{\partial}{\partial I_h} \varphi \left(1 - \frac{A_m}{kN_m} \right) (S_m + I_m) - (\eta_m + \mu_m) A_m$$

$$= 0 \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial D}{\partial A_m} = \frac{\partial}{\partial A_m} \varphi \left(1 - \frac{A_m}{kN_m} \right) (S_m + I_m) - (\eta_m + \mu_m) A_m$$

$$= -\frac{\varphi}{kN_m} (S_m + I_m) - (\eta_m + \mu_m)$$

$$(4.65)$$

$$\frac{\partial D}{\partial S_m} = \frac{\partial}{\partial S_m} \varphi \left(1 - \frac{A_m}{kN_m} \right) (S_m + I_m) - (\eta_m + \mu_m) A_m$$

$$= \varphi \left(1 - \frac{A_m}{kN_m} \right) \quad (4.66)$$

$$\frac{\partial D}{\partial I_m} = \frac{\partial}{\partial I_m} \varphi \left(1 - \frac{A_m}{kN_m} \right) (S_m + I_m) - (\eta_m + \mu_m) A_m$$

$$= \varphi \left(1 - \frac{A_m}{kN_m} \right) \quad (4.67)$$

$$\frac{\partial E}{\partial S_h} = \frac{\partial}{\partial S_h} \left(\eta_m A_m - \left(B\beta_m \frac{I_h}{N_h} + \mu_m \right) S_m \right)$$

$$= 0 \quad (4.68)$$

$$\frac{\partial E}{\partial E_h} = \frac{\partial}{\partial E_h} \left(\eta_m A_m - \left(B\beta_m \frac{I_h}{N_h} + \mu_m \right) S_m \right)$$

$$= 0 \quad (4.69)$$

$$\frac{\partial E}{\partial I_h} = \frac{\partial}{\partial I_h} \left(\eta_m A_m - \left(B\beta_m \frac{I_h}{N_h} + \mu_m \right) S_m \right)$$

$$= -\frac{B\beta_m S_m}{N_h} \quad (4.70)$$

$$\frac{\partial E}{\partial A_m} = \frac{\partial}{\partial A_m} \left(\eta_m A_m - \left(B\beta_m \frac{I_h}{N_h} + \mu_m \right) S_m \right)$$

$$= \eta_m \quad (4.71)$$

$$\frac{\partial E}{\partial S_m} = \frac{\partial}{\partial S_m} \left(\eta_m A_m - \left(B\beta_m \frac{I_h}{N_h} + \mu_m \right) S_m \right)$$

$$= -\left(B\beta_m \frac{I_h}{N_h} + \mu_m \right) \quad (4.72)$$

$$\frac{\partial E}{\partial I_m} = \frac{\partial}{\partial I_m} \left(\eta_m A_m - \left(B\beta_m \frac{I_h}{N_h} + \mu_m \right) S_m \right)$$

$$= 0 \quad (4.73)$$

$$\frac{\partial F}{\partial S_h} = \frac{\partial}{\partial S_h} \left(B\beta_m \frac{I_h}{N_h} S_m - \mu_m I_m \right) = 0 \quad (4.74)$$

$$\frac{\partial F}{\partial E_h} = \frac{\partial}{\partial E_h} \left(B\beta_m \frac{I_h}{N_h} S_m - \mu_m I_m \right) = 0 \quad (4.75)$$

$$\frac{\partial F}{\partial I_h} = \frac{\partial}{\partial I_h} \left(B\beta_m \frac{I_h}{N_h} S_m - \mu_m I_m \right) = \frac{B\beta_m S_m}{N_h} \quad (4.76)$$

$$\frac{\partial F}{\partial A_m} = \frac{\partial}{\partial A_m} \left(B\beta_m \frac{I_h}{N_h} S_m - \mu_m I_m \right) = 0 \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial F}{\partial S_m} = \frac{\partial}{\partial S_m} \left(B\beta_m \frac{I_h}{N_h} S_m - \mu_m I_m \right) = \frac{B\beta_m I_h}{N_h} \quad (4.78)$$

$$\frac{\partial F}{\partial I_m} = \frac{\partial}{\partial I_m} \left(B\beta_m \frac{I_h}{N_h} S_m - \mu_m I_m \right) = -\mu_m \quad (4.79)$$

Dari hasil turunan persamaan (4.44) sampai (4.79) dapat ditulis dalam bentuk matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_{12} \\ x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 & x_{12} \\ 0 & x_4 & x_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_7 & x_9 & x_9 \\ 0 & 0 & -x_6 & x_8 & -x_{10} + x_{11} & 0 \\ 0 & 0 & x_6 & 0 & x_{10} & x_{11} \end{bmatrix}$$

dengan

$$x_1 = -\frac{B\beta_h I_m}{N_h} - p - \mu_h, \quad x_2 = \frac{B\beta_h I_m}{N_h} + p, \quad x_3 = -\mu_h - \gamma_h,$$

$$x_4 = \gamma_h, \quad x_5 = -\eta_h - \mu_h, \quad x_6 = \frac{B\beta_m S_m}{N_h},$$

$$x_7 = -\frac{\varphi}{kN_h} (S_m + I_m) - (\eta_m + \mu_m), \quad x_8 = \eta_m,$$

$$x_9 = \varphi \left(1 - \frac{A_m}{kN_h} \right), \quad x_{10} = \frac{B\beta_m I_h}{N_h} - \mu_m, \quad x_{11} = -\mu_m, \text{ dan}$$

$$x_{12} = \frac{B\beta_h S_h}{N_h}$$

4.4.1 Kestabilan Lokal Titik Setimbang Bebas Penyakit

Telah diketahui sebelumnya bahwa titik setimbang bebas penyakit adalah $E_0 = (S_h^0, E_h^0, I_h^0, A_m^0, S_m^0, I_m^0) = \left\{ \frac{\mu_h^* N_h}{(p+\mu_h)}, \frac{p\mu_h^* N_h}{(p+\mu_h)(\mu_h+\gamma_h)}, 0, \frac{kN_h\mathcal{M}}{\varphi\eta_m}, \frac{kN_h\mathcal{M}}{\mu_m\varphi}, 0 \right\}$, maka

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & -k \\ b & c & 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & d & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g & i & i \\ 0 & 0 & -f & h & j & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & 0 & j \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} a &= -p - \mu_h, & b &= p, & c &= -\mu_h - \gamma_h, & d &= \gamma_h, & e &= -\eta_h - \mu_h, \\ f &= \frac{B\beta_m k \mathcal{M}}{\mu_m \varphi}, & g &= -\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m, & h &= \eta_m, & i &= \varphi - \frac{\mathcal{M}}{\eta_m}, \\ j &= -\mu_m, & \text{dan } k &= \frac{\mu_h B \beta_h}{p + \mu_h} \end{aligned}$$

Selanjutnya dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menggunakan

$$|J(E_0) - \lambda I| = 0$$

Sehingga

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -k \\ b & c - \lambda & 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & d & e - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g - \lambda & i & i \\ 0 & 0 & -f & h & j - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & 0 & j - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen dari sistem (4.11) sampai (4.16) berupa persamaan karakteristik yaitu

$$\begin{aligned} \lambda^6 + (2g - a - c - e)\lambda^5 + (ac + ae - 2ag + ce - cg + eg + 2gj + j^2 + hi)\lambda^4 + (acg - ace - aeg - 2agj - aj^2 + ceg - 2cgj - cj^2 - chi - 2egj - ej^2 - ehi - gj^2 - hij + dfk)\lambda^3 + (2acgj + acj^2 - aceg + achi + 2aegj + aej^2 + aehi + agj^2 + ahij - adfk + 2cegj + cej^2 + cehi + cgj^2 - chij + egj^2 + ehij - dfgk - dfjk + bdfk)\lambda^2 + (adfgk + adfjk - cegj^2 - 2acegj - acej^2 - acehi - acgj^2 - achij - aegj^2 - aehij - cehij + dfgjk - dfhik - bdfgk - bdfjk)\lambda + (acegj^2 + acehij - adfgjk + adfhik + bdfgjk - bdfhik) = 0 \end{aligned} \quad (4.81)$$

Persamaan (4.81) dapat ditulis seperti berikut:

$$\begin{aligned} \lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6 &= 0 \\ \text{dengan masing - masing nilai untuk } a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \text{ dan } a_6 &\text{ adalah} \\ a_1 &= 2g - a - c - e \\ a_2 &= ac + ae - 2ag + ce - cg + eg + 2gj + j^2 + hi \\ a_3 &= acg - ace - aeg - 2agj - aj^2 + ceg - 2cgj - cj^2 - chi - 2egj - ej^2 - ehi - gj^2 - hij + dfk \\ a_4 &= 2acgj + acj^2 - aceg + achi + 2aegj + aej^2 + aehi + agj^2 + ahij - adfk + 2cegj + cej^2 + cehi + cgj^2 - chij + egj^2 + ehij - dfgk - dfjk + bdfk \\ a_5 &= adfgk + adfjk - cegj^2 - 2acegj - acej^2 - acehi - acgj^2 - achij - aegj^2 - aehij - cehij + dfgjk - dfhik - bdfgk - bdfjk \\ a_6 &= acegj^2 + acehij - adfgjk + adfhik + bdfgjk - bdfhik \end{aligned}$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit dari model (4.11) – (4.16) dikatakan stabil jika akar – akar persamaan karakteristik dari suatu matriks mempunyai nilai eigen dengan bagian real negatif. Dengan rumus Routh – Hurwitz dapat dituliskan dalam tabel berikut ini :

Tabel 4.1 Routh – Hurwitz Bebas Penyakit

a_0	a_2	a_4	a_6	$a_8 = 0$	$a_{10} = 0$
a_1	a_3	a_5	$a_7 = 0$	$a_9 = 0$	$a_{11} = 0$
b_1	b_2	b_3	b_4	0	0
c_1	c_2	c_3	0	0	0
d_1	d_2	0	0	0	0
e_1	0	0	0	0	0

dengan

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} = a_6,$$

$$b_4 = \frac{a_1 a_8 - a_0 a_9}{a_1} = 0, c_1 = \frac{b_1 a_3 - b_2 a_1}{b_1}, c_2 = \frac{b_1 a_5 - b_3 a_1}{b_1},$$

$$c_3 = \frac{b_1 a_7 - b_4 a_1}{b_1} = 0, d_1 = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{c_1}, d_2 = \frac{c_1 b_3 - c_3 b_1}{c_1} = b_3, \text{ dan}$$

$$e_1 = \frac{d_1 c_2 - d_2 c_1}{d_1}$$

Nilai a_1 dapat dianalisa sebagai berikut :

$$a_1 = 2g - a - c - e$$

$$\Rightarrow a_1 = 2 \left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m \right) - (-p - \mu_h) - (-\mu_h - \gamma_h) - (-\eta_h - \mu_h)$$

$$\Rightarrow a_1 = 2 \left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m \right) + p + 3\mu_h + \gamma_h + \eta_h$$

nilai a_1 positif ($a_1 > 0$) jika $p + 3\mu_h + \gamma_h + \eta_h > \frac{\mathcal{M}}{\mu_m} + \mu_m + \eta_m$

untuk nilai b_1 dapat dianalisa sebagai berikut :

nilai b_1 akan bernilai positif ($\frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} > 0$) jika a_2 bernilai positif ($a_2 > 0$)

maka akibatnya nilai a_2 harus positif dengan analisa sebagai berikut:

$$a_2 = ac + ae - 2ag + ce - cg + eg + 2gj + j^2 + hi$$

$$\Rightarrow a_2 = (-p - \mu_h)(-\mu_h - \gamma_h) + (-p - \mu_h)(-\eta_h - \mu_h) - 2(-p - \mu_h)\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right) + (-\mu_h - \gamma_h)(-\eta_h - \mu_h) - (-\mu_h - \gamma_h)\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right) + (-\eta_h - \mu_h)\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right) + 2\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right)\left(\frac{\mu_h B \beta_h}{p + \mu_h}\right) + \left(\frac{\mu_h B \beta_h}{p + \mu_h}\right)^2 + \eta_m\left(\varphi - \frac{\mathcal{M}}{\eta_m}\right)$$

a_2 akan bernilai positif ($a_2 > 0$) jika

$$(-p - \mu_h)(-\mu_h - \gamma_h) + (-p - \mu_h)(-\eta_h - \mu_h) + (-\mu_h - \gamma_h)(-\eta_h - \mu_h) + (-\eta_h - \mu_h)\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right) + \left(\frac{\mu_h B \beta_h}{p + \mu_h}\right)^2 + \eta_m\left(\varphi - \frac{\mathcal{M}}{\eta_m}\right) > 2(-p - \mu_h)\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right) + (-\mu_h - \gamma_h)\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right) - 2\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right)\left(\frac{\mu_h B \beta_h}{p + \mu_h}\right)$$

untuk nilai $a_1 a_2 > a_0 a_3$

$$\Leftrightarrow \left(2\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right) + p + 3\mu_h + \gamma_h + \eta_h\right)\left((-p - \mu_h)(-\mu_h - \gamma_h) + (-p - \mu_h)(-\eta_h - \mu_h) - 2(-p - \mu_h)\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right) + (-\mu_h - \gamma_h)(-\eta_h - \mu_h) - (-\mu_h - \gamma_h)\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right) + (-\eta_h - \mu_h)\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right) + 2\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right)\left(\frac{\mu_h B \beta_h}{p + \mu_h}\right) + \left(\frac{\mu_h B \beta_h}{p + \mu_h}\right)^2 + \eta_m\left(\varphi - \frac{\mathcal{M}}{\eta_m}\right)\right) > (-\mu_h - \gamma_h)\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right) - (-p - \mu_h)(-\mu_h - \gamma_h)(-\eta_h - \mu_h) - (-p - \mu_h)(-\eta_h - \mu_h)\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right) - 2(-p - \mu_h)\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right)(-\mu_m) - (-p - \mu_h)(-\mu_m)^2 + (-\mu_h - \gamma_h)(-\eta_h - \mu_h)\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right) - 2(-\mu_h - \gamma_h)\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right)(-\mu_m) - (-\mu_h - \gamma_h)(-\mu_m)^2 - (-\mu_h - \gamma_h)\eta_m\left(\varphi - \frac{\mathcal{M}}{\eta_m}\right)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\mathcal{M}}{\eta_m} \right) - 2(-\eta_h - \mu_h) \left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m \right) (-\mu_m) - \\ & (-\eta_h - \mu_h) j^2 - (-\eta_h - \mu_h) \eta_m \left(\varphi - \frac{\mathcal{M}}{\eta_m} \right) - \left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \right. \\ & \left. \eta_m \right) (-\mu_m)^2 - \eta_m \left(\varphi - \frac{\mathcal{M}}{\eta_m} \right) (-\mu_m) + \gamma_h \left(\frac{B\beta_m k \mathcal{M}}{\mu_m \varphi} \right) \left(\frac{\mu_h B \beta_h}{p + \mu_h} \right) \end{aligned}$$

Untuk nilai c_1 dapat dianalisis sebagai berikut :

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - b_2 a_1}{b_1}$$

nilai c_1 akan bernilai positif jika $b_1 a_3 > b_2 a_1$

maka akibatnya nilai $a_3 > 0$ jika

$$\begin{aligned} & (-\mu_h - \gamma_h) \left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m \right) - (-p - \mu_h) (-\mu_h - \gamma_h) (-\eta_h - \\ & \mu_h) - (-p - \mu_h) (-\eta_h - \mu_h) \left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m \right) - \\ & 2(-p - \mu_h) \left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m \right) (-\mu_m) - (-p - \mu_h) (-\mu_m)^2 - \\ & 2(-\mu_h - \gamma_h) \left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m \right) (-\mu_m) - (-\mu_h - \gamma_h) (-\mu_m)^2 - \\ & 2(-\eta_h - \mu_h) \left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m \right) (-\mu_m) - (-\eta_h - \\ & \mu_h) (-\mu_m)^2 - \left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m \right) (-\mu_m)^2 + \\ & \gamma_h \left(\frac{B\beta_m k \mathcal{M}}{\mu_m \varphi} \right) \left(\frac{\mu_h B \beta_h}{p + \mu_h} \right) > -(-\mu_h - \gamma_h) (-\eta_h - \mu_h) \left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \right. \\ & \left. \eta_m \right) + (-\mu_h - \gamma_h) \eta_m \left(\varphi - \frac{\mathcal{M}}{\eta_m} \right) + (-\eta_h - \mu_h) \eta_m \left(\varphi - \frac{\mathcal{M}}{\eta_m} \right) + \\ & \eta_m \left(\varphi - \frac{\mathcal{M}}{\eta_m} \right) (-\mu_m) \end{aligned}$$

Untuk nilai d_1 dapat dianalisis sebagai berikut :

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{c_1}$$

nilai d_1 akan bernilai positif jika $c_1 b_2 > c_2 b_1$

maka akibatnya nilai $b_2 > 0$ jika $a_1 a_4 > a_0 a_5$

$$\begin{aligned} & \left(2 \left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m \right) + p + 3\mu_h + \gamma_h + \eta_h \right) \left(2(-p - \right. \\ & \left. \mu_h) (-\mu_h - \gamma_h) \left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m \right) (-\mu_m) + (-p - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mu_h)(-\mu_h-\gamma_h)(-\mu_m)^2 - (-p-\mu_h)(-\mu_h-\gamma_h)(-\eta_h - \\
& \mu_h)\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right) + (-p-\mu_h)(-\mu_h-\gamma_h)\eta_m\left(\varphi - \frac{\mathcal{M}}{\eta_m}\right) + \\
& 2(-p-\mu_h)(-\eta_h - \mu_h)\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right)(-\mu_m) + \\
& (-p-\mu_h)(-\eta_h - \mu_h)(-\mu_m)^2 + (-p-\mu_h)(-\eta_h - \\
& \mu_h)\eta_m\left(\varphi - \frac{\mathcal{M}}{\eta_m}\right) + (-p-\mu_h)\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right)(-\mu_m)^2 + \\
& (-p-\mu_h)\eta_m\left(\varphi - \frac{\mathcal{M}}{\eta_m}\right)(-\mu_m) - \\
& (-p-\mu_h)\gamma_h\left(\frac{B\beta_mk\mathcal{M}}{\mu_m\varphi}\right)\left(\frac{\mu_hB\beta_h}{p+\mu_h}\right) + 2(-\mu_h-\gamma_h)(-\eta_h - \\
& \mu_h)\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right)(-\mu_m) + (-\mu_h-\gamma_h)(-\eta_h - \\
& \mu_h)(-\mu_m)^2 + (-\mu_h-\gamma_h)(-\eta_h - \mu_h)\eta_m\left(\varphi - \frac{\mathcal{M}}{\eta_m}\right) + \\
& (-\mu_h-\gamma_h)\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right)(-\mu_m)^2 - (-\mu_h-\gamma_h)\eta_m\left(\varphi - \right. \\
& \left.\frac{\mathcal{M}}{\eta_m}\right)(-\mu_m) + (-\eta_h - \mu_h)\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right)(-\mu_m)^2 + \\
& (-\eta_h - \mu_h)\eta_m\left(\varphi - \frac{\mathcal{M}}{\eta_m}\right)(-\mu_m) - \gamma_h\left(\frac{B\beta_mk\mathcal{M}}{\mu_m\varphi}\right)\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \right. \\
& \left.\eta_m\right)\left(\frac{\mu_hB\beta_h}{p+\mu_h}\right) - \gamma_h\left(\frac{B\beta_mk\mathcal{M}}{\mu_m\varphi}\right)(-\mu_m)\left(\frac{\mu_hB\beta_h}{p+\mu_h}\right) + \\
& p\gamma_h\left(\frac{B\beta_mk\mathcal{M}}{\mu_m\varphi}\right)\left(\frac{\mu_hB\beta_h}{p+\mu_h}\right)\Bigg) > (-p-\mu_h)\gamma_h\left(\frac{B\beta_mk\mathcal{M}}{\mu_m\varphi}\right)\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \right. \\
& \left.\eta_m\right)\left(\frac{\mu_hB\beta_h}{p+\mu_h}\right) + (-p-\mu_h)\gamma_h\left(\frac{B\beta_mk\mathcal{M}}{\mu_m\varphi}\right)(-\mu_m)\left(\frac{\mu_hB\beta_h}{p+\mu_h}\right) - \\
& (-\mu_h-\gamma_h)(-\eta_h - \mu_h)\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right)(-\mu_m)^2 - \\
& 2(-p-\mu_h)(-\mu_h-\gamma_h)(-\eta_h - \mu_h)\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right)(-\mu_m) - \\
& (-p-\mu_h)(-\mu_h-\gamma_h)(-\eta_h - \mu_h)(-\mu_m)^2 - (-p-\mu_h) \\
& \mu_h)(-\mu_h-\gamma_h)(-\eta_h - \mu_h)\eta_m\left(\varphi - \frac{\mathcal{M}}{\eta_m}\right) - \\
& (-p-\mu_h)(-\mu_h-\gamma_h)\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right)(-\mu_m)^2 - \\
& (-p-\mu_h)(-\mu_h-\gamma_h)\eta_m\left(\varphi - \frac{\mathcal{M}}{\eta_m}\right)(-\mu_m) - (-p-\mu_h)(-\eta_h - \\
& \mu_h)\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m\right)(-\mu_m)^2 - (-p-\mu_h)(-\eta_h -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mu_h) \eta_m \left(\varphi - \frac{\mathcal{M}}{\eta_m} \right) (-\mu_m) - (-\mu_h - \gamma_h) (-\eta_h - \mu_h) \eta_m \left(\varphi - \right. \\ & \left. \frac{\mathcal{M}}{\eta_m} \right) (-\mu_m) + \gamma_h \left(\frac{B\beta_m k \mathcal{M}}{\mu_m \varphi} \right) \left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \mu_m - \eta_m \right) (-\mu_m) \left(\frac{\mu_h B\beta_h}{p + \mu_h} \right) - \\ & \gamma_h \left(\frac{B\beta_m k \mathcal{M}}{\mu_m \varphi} \right) \eta_m \left(\varphi - \frac{\mathcal{M}}{\eta_m} \right) \left(\frac{\mu_h B\beta_h}{p + \mu_h} \right) - p \gamma_h \left(\frac{B\beta_m k \mathcal{M}}{\mu_m \varphi} \right) \left(-\frac{\mathcal{M}}{\mu_m} - \right. \\ & \left. \mu_m - \eta_m \right) \left(\frac{\mu_h B\beta_h}{p + \mu_h} \right) - p \gamma_h \left(\frac{B\beta_m k \mathcal{M}}{\mu_m \varphi} \right) (-\mu_m) \left(\frac{\mu_h B\beta_h}{p + \mu_h} \right) \end{aligned}$$

Untuk nilai e_1 dapat dianalisis sebagai berikut :

$$e_1 = \frac{d_1 c_2 - d_2 c_1}{d_1}$$

nilai e_1 akan bernilai positif jika $d_1 c_2 > d_2 c_1$
maka akibatnya nilai $c_2 > 0$ jika $b_1 a_5 > b_3 a_1$

Dari tabel Routh-Hurwitz dapat dilihat bahwa variabel-variabel pada kolom pertama memiliki nilai yang sama yaitu bertanda positif. Titik kesetimbangan bebas penyakit untuk model epidemiologi SEIR demam berdarah terbukti stabil asimtotik lokal jika memenuhi $a_1 > 0, a_1 a_2 > a_0 a_3, b_1 a_3 > b_2 a_1, c_1 b_2 > c_2 b_1$, dan $d_1 c_2 > d_2 c_1$.

4.4.2 Kestabilan Lokal Titik Setimbang Endemik

Telah diketahui sebelumnya bahwa titik setimbang endemik $E_0^* = (S_h^*, E_h^*, I_h^*, A_m^*, S_m^*, I_m^*)$ dalam hal ini I_m^* selalu positif dengan

$$\begin{aligned} S_h^* &= \frac{\mu_h^* N_h^2}{B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h} \\ E_h^* &= \left(\frac{B\beta_h I_m^* + pN_h}{(\mu_h + \gamma_h)} \right) \left(\frac{\mu_h^* N_h}{B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h} \right) \\ I_h^* &= \frac{\gamma_h}{(\eta_h + \mu_h)} \left(\frac{B\beta_h I_m^* + pN_h}{(\mu_h + \gamma_h)} \right) \left(\frac{\mu_h^* N_h}{B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h} \right) \\ S_m^* &= \frac{\mu_m I_m^* (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h)}{\mu_h^* \gamma_h B\beta_m (B\beta_h I_m^* + pN_h)} \\ A_m^* &= \frac{\mu_m I_m^* (\mu_h^* B\beta_m \gamma_h (B\beta_h I_m^* + pN_h) + \mu_m (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h))}{\eta_m \mu_h^* \gamma_h B\beta_m (B\beta_h I_m^* + pN_h)} \end{aligned}$$

Pada titik setimbang $E_0^* = (S_h^*, E_h^*, I_h^*, A_m^*, S_m^*, I_m^*)$ matriks Jacobiannya adalah

$$J(E_0^*) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & -m \\ b & c & 0 & 0 & 0 & m \\ 0 & d & f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h & j & j \\ 0 & 0 & -g & i & -k+l & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 & k & l \end{bmatrix}$$

dengan

$$a = -\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h, \quad b = \frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} + p, \quad c = -\mu_h - \gamma_h, \quad d = \gamma_h, \\ f = -\eta_h - \mu_h, \quad g = \frac{B\beta_m S_m^*}{N_h}, \quad h = -\frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m), \\ i = \eta_m, \quad j = \varphi \left(1 - \frac{A_m^*}{kN_m}\right), \quad k = \frac{B\beta_m I_h^*}{N_h}, \quad l = -\mu_m, \quad \text{dan } m = \frac{B\beta_h S_h^*}{N_h}$$

Selanjutnya dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menggunakan

$$|J(E_0) - \lambda I| = 0$$

sehingga

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -m \\ b & c - \lambda & 0 & 0 & 0 & m \\ 0 & d & f - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h - \lambda & j & j \\ 0 & 0 & -g & i & -k + l - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 & k & l - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen dari sistem (4.11) sampai (4.16) berupa persamaan karakteristik yaitu

$$\lambda^6 + (f - a - c - h + k)\lambda^5 + (ac - af + ah - ak + cf + ch - ck - 2cl + fh + fk + 2fl - hk - 2hl + kl + l^2 + 2l)\lambda^4 + (2acl - acf - ach + ack - afh - afk - 2afl + ahk + 2ahl - akh - al^2 - 2al - cfh + cfk + 2cfl + chh + 2chl - ckl - cl^2 + fhk + 2fhl - fkl + fl^2 - hkl - hl^2 - 2ijl - ijk + dgm)\lambda^3 + (acf - acfk - 2acfl - achk -$$

$$\begin{aligned}
& 2achl + ackl + acl^2 - afhk - 2afhl + afkl - afl^2 + ahkl + \\
& ahl^2 + 2aijl + aijk - adgm - cfhk - 2cfhl + cfkl + cfl^2 + \\
& chkl + chl^2 + 2cijl + cijk + fhkl + fhl^2 + 2fijl + fijk - \\
& 2dgkm + dghm - dglm + bgm) \lambda^2 + (acfhk + 2acfh - \\
& acfkl - acfl^2 - achkl - achl^2 - 2acijl - acijk - afhkl - \\
& afhl^2 - 2afijl - afijk - adghm + adglm - cfhkl - \\
& cfhl^2 - 2cfijl - cfijk + 2dghkm + dghlm - dijm + \\
& bdgkm - bghm + bgkm + bglm) \lambda + (acfhkl + acfhl^2 + \\
& 2acfijl + acfij) = 0
\end{aligned} \tag{4.90}$$

Persamaan (4.90) dapat ditulis seperti berikut :

$$\lambda^6 + a_1 \lambda^5 + a_2 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_4 \lambda^2 + a_5 \lambda + a_6 = 0$$

dengan masing – masing nilai untuk a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , dan a_6 adalah

$$a_1 = f - a - c - h + k$$

$$a_2 = ac - af + ah - ak + cf + ch - ck - 2cl + fh + fk + 2fl - hk - 2hl + kl + l^2 + 2l$$

$$\begin{aligned}
a_3 = & 2acl - acf - ach + ack - afh - afk - 2afl + ahk + \\
& 2ahl - akl - al^2 - 2al - cfh + cfk + 2cfl + chk + \\
& 2chl - ckl - cl^2 + fhk + 2fhl - fkl + fl^2 - hkl - hl^2 - \\
& 2ijl - ijk + dgm
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4 = & acfh - acfk - 2acfl - achk - 2achl + ackl + acl^2 - \\
& afhk - 2afhl + afkl - afl^2 + ahkl + ahl^2 + 2aijl + \\
& aijk - adgm - cfhk - 2cfhl + cfkl + cfl^2 + chkl + \\
& chl^2 + 2cijl + cijk + fhkl + fhl^2 + 2fijl + fijk - \\
& 2dgkm + dghm - dglm + bgm
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_5 = & cfhk + 2acfh - acfkl - acfl^2 - achkl - achl^2 - \\
& 2acijl - acijk - afhkl - afhl^2 - 2afijl - afijk - \\
& adghm + adglm - cfhkl - cfhl^2 - 2cfijl - cfijk + \\
& 2dghkm + dghlm - dijm + bdgkm - bghm + bgkm + \\
& bglm
\end{aligned}$$

$$a_6 = acfhkl + acfhl^2 + 2acfijl + acfij$$

Titik kesetimbangan endemik dari model (4.11) – (4.16) dikatakan stabil jika akar – akar persamaan karakteristik dari suatu matriks mempunyai nilai eigen dengan bagian real negatif jika dan hanya jika $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, $c_1 > 0$, $d_1 > 0$, dan $e_1 > 0$. Dengan rumus Routh – Hurwitz dapat dituliskan dalam tabel berikut ini :

Tabel 4.2 Routh – Hurwitz Endemik

a_0	a_2	a_4	a_6	$a_8 = 0$	$a_{10} = 0$
a_1	a_3	a_5	$a_7 = 0$	$a_9 = 0$	$a_{11} = 0$
b_1	b_2	b_3	b_4	0	0
c_1	c_2	c_3	0	0	0
d_1	d_2	0	0	0	0
e_1	0	0	0	0	0

dengan

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} = a_6,$$

$$b_4 = \frac{a_1 a_8 - a_0 a_9}{a_1} = 0, c_1 = \frac{b_1 a_3 - b_2 a_1}{b_1}, c_2 = \frac{b_1 a_5 - b_3 a_1}{b_1},$$

$$c_3 = \frac{b_1 a_7 - b_4 a_1}{b_1} = 0, d_1 = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{c_1}, d_2 = \frac{c_1 b_3 - c_3 b_1}{c_1} = b_3, \text{ dan}$$

$$e_1 = \frac{d_1 c_2 - d_2 c_1}{d_1}$$

Nilai a_1 dapat dianalisa sebagai berikut :

$$a_1 = f - a - c - h + k$$

$$\Rightarrow a_1 = -\eta_h - \mu_h - \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p \right) - (-\mu_h - \gamma_h) - \left(-\frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) + \frac{B\beta_m I_h^*}{N_h}$$

$$\Rightarrow a_1 = -\eta_h - \mu_h + \frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} + p + \mu_h + \gamma_h + \frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + I_m^*) + \eta_m + \mu_m + \frac{B\beta_m I_h^*}{N_h}$$

nilai a_1 positif ($a_1 > 0$) jika $\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} + p + \mu_h + \gamma_h + \frac{\varphi}{kN_m}(S_m^* + I_m^*) + \eta_m + \mu_m + \frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} > \eta_h + \mu_h$

untuk nilai b_1 dapat dianalisa sebagai berikut :

nilai b_1 akan bernilai positif ($\frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} > 0$) jika a_2 bernilai positif ($a_2 > 0$)

maka akibatnya nilai a_2 harus positif dengan analisa sebagai berikut:

$$a_2 = ac - af + ah - ak + cf + ch - ck - 2cl + fh + fk + 2fl - hk - 2hl + kl + l^2 + 2l$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_2 = & \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) (-\mu_h - \gamma_h) - \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) (-\eta_h - \mu_h) + \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) \left(-\frac{\varphi}{kN_m}(S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) \\ & - \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) + (-\mu_h - \gamma_h) (-\eta_h - \mu_h) + (-\mu_h - \gamma_h) \left(-\frac{\varphi}{kN_m}(S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) \\ & - (-\mu_h - \gamma_h) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) - 2(-\mu_h - \gamma_h)(-\mu_m) + (-\eta_h - \mu_h) \left(-\frac{\varphi}{kN_m}(S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) \\ & + (-\eta_h - \mu_h) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) + 2(-\eta_h - \mu_h)(-\mu_m) - \left(-\frac{\varphi}{kN_m}(S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) \\ & - 2 \left(-\frac{\varphi}{kN_m}(S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) (-\mu_m) + \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) (-\mu_m) + (-\mu_m)^2 + 2(-\mu_m) \end{aligned}$$

a_2 akan bernilai positif ($a_2 > 0$) jika

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) (-\mu_h - \gamma_h) + \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) \left(-\frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) \\
& - \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) + (-\mu_h - \gamma_h) (-\eta_h - \mu_h) \\
& + (-\mu_h - \gamma_h) \left(-\frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) - (-\mu_h - \gamma_h) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) \\
& + (-\eta_h - \mu_h) \left(-\frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) + 2(-\eta_h - \mu_h) (-\mu_m) \\
& - \left(-\frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) + (-\mu_m)^2 > \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) (-\eta_h - \mu_h) \\
& + 2(-\mu_h - \gamma_h) (-\mu_m) + 2 \left(-\frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) (-\mu_m) \\
& - (-\eta_h - \mu_h) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) - \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) (-\mu_m) - 2(-\mu_m)
\end{aligned}$$

untuk nilai $a_1 a_2 > a_0 a_3$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \left(-\eta_h - \mu_h + \frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} + p + \mu_h + \gamma_h + \frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + I_m^*) + \eta_m + \mu_m + \frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) \\
& \left(\left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) (-\mu_h - \gamma_h) - \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) (-\eta_h - \mu_h) \right. \\
& \left. + \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) \left(-\frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) - \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) \right. \\
& \left. + (-\mu_h - \gamma_h) (-\eta_h - \mu_h) + (-\mu_h - \gamma_h) \left(-\frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) - \right. \\
& \left. (-\mu_h - \gamma_h) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) - 2(-\mu_h - \gamma_h) (-\mu_m) + (-\eta_h - \mu_h) \left(-\frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) \right. \\
& \left. + (-\eta_h - \mu_h) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) + 2(-\eta_h - \mu_h) (-\mu_m) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{\varphi}{kNm} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) - 2 \left(-\frac{\varphi}{kNm} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) (-\mu_m) + \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) (-\mu_m) + (-\mu_m)^2 + \\
& 2(-\mu_m) \Bigg) > 2 \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) (-\mu_h - \gamma_h) (-\mu_m) - \\
& \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) (-\mu_h - \gamma_h) (-\eta_h - \mu_h) - \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) (-\mu_h - \gamma_h) \left(-\frac{\varphi}{kNm} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) + \\
& \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) (-\mu_h - \gamma_h) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) - \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) (-\eta_h - \mu_h) \left(-\frac{\varphi}{kNm} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) - \\
& \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) (-\eta_h - \mu_h) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) - 2 \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) (-\eta_h - \mu_h) (-\mu_m) + \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) \left(-\frac{\varphi}{kNm} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) + 2 \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) \left(-\frac{\varphi}{kNm} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) (-\mu_m) - \\
& \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) (-\mu_m)^2 - 2 \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) (-\mu_m) - \\
& (-\mu_h - \gamma_h) (-\eta_h - \mu_h) \left(-\frac{\varphi}{kNm} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) + \\
& (-\mu_h - \gamma_h) (-\eta_h - \mu_h) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) + 2(-\mu_h - \gamma_h) (-\eta_h - \mu_h) (-\mu_m) + (-\mu_h - \gamma_h) \left(-\frac{\varphi}{kNm} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) + 2(-\mu_h - \gamma_h) \left(-\frac{\varphi}{kNm} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) (-\mu_m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mu_m) \Big) (-\mu_m) - (-\mu_h - \gamma_h) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) (-\mu_m) - (-\mu_h - \gamma_h) (-\mu_m)^2 + \\
& (-\eta_h - \mu_h) \left(-\frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) + \\
& 2(-\eta_h - \mu_h) \left(-\frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) (-\mu_m) - \\
& (-\eta_h - \mu_h) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) (-\mu_m) + (-\eta_h - \mu_h) (-\mu_m)^2 - \\
& \left(-\frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) (-\mu_m) - \\
& \left(-\frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) (-\mu_m)^2 - 2\eta_m \left(\varphi \left(1 - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{A_m^*}{kN_m} \right) \right) (-\mu_m) - \eta_m \left(\varphi \left(1 - \frac{A_m^*}{kN_m} \right) \right) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) + \gamma_h \frac{B\beta_m S_m^*}{N_h} \frac{B\beta_h S_h^*}{N_h}
\end{aligned}$$

Untuk nilai c_1 dapat dianalisis sebagai berikut :

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - b_2 a_1}{b_1}$$

nilai c_1 akan bernilai positif jika $b_1 a_3 > b_2 a_1$

maka akibatnya nilai $a_3 > 0$ jika

$$\begin{aligned}
& - \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) (-\mu_h - \gamma_h) (-\eta_h - \mu_h) - \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \right. \\
& \left. \mu_h \right) (-\mu_h - \gamma_h) \left(-\frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) + \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \right. \\
& \left. \mu_h \right) (-\mu_h - \gamma_h) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) - \\
& \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) (-\eta_h - \mu_h) \left(-\frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) - \\
& 2 \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) (-\eta_h - \mu_h) (-\mu_m) + \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \right. \\
& \left. \mu_h \right) \left(-\frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) - \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mu_h) (-\mu_m)^2 - (-\mu_h - \gamma_h)(-\eta_h - \mu_h) \left(-\frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + I_m^*) - \right. \\
& \left. (\eta_m + \mu_m) \right) + (-\mu_h - \gamma_h)(-\eta_h - \mu_h) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) + \\
& (-\mu_h - \gamma_h) \left(-\frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) - \\
& (-\mu_h - \gamma_h)(-\mu_m)^2 + (-\eta_h - \mu_h) \left(-\frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + I_m^*) - \right. \\
& \left. (\eta_m + \mu_m) \right) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) - \\
& \left(-\frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) (-\mu_m) - \left(-\frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + \right. \\
& \left. I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) (-\mu_m)^2 - 2\eta_m \left(\varphi \left(1 - \frac{A_m^*}{kN_m} \right) \right) (-\mu_m) + \\
& \gamma_h \frac{B\beta_m S_m^*}{N_h} \frac{B\beta_h S_h^*}{N_h} > -2 \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) (-\mu_h - \gamma_h)(-\mu_m) + \\
& \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) (-\eta_h - \mu_h) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) - 2 \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \right. \\
& \left. \mu_h \right) \left(-\frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + I_m^*) - (\eta_m + \mu_m) \right) (-\mu_m) + \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \right. \\
& \left. \mu_h \right) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) (-\mu_m) + 2 \left(-\frac{B\beta_h I_m^*}{N_h} - p - \mu_h \right) (-\mu_m) - \\
& 2(-\mu_h - \gamma_h)(-\eta_h - \mu_h)(-\mu_m) - 2(-\mu_h - \gamma_h) \left(-\frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + I_m^*) - \right. \\
& \left. (\eta_m + \mu_m) \right) (-\mu_m) - 2(-\eta_h - \mu_h) \left(-\frac{\varphi}{kN_m} (S_m^* + I_m^*) - \right. \\
& \left. (\eta_m + \mu_m) \right) (-\mu_m) + (-\eta_h - \mu_h) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) (-\mu_m) - (-\eta_h - \\
& \mu_h)(-\mu_m)^2 + (-\mu_h - \gamma_h) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right) (-\mu_m) + \eta_m \left(\varphi \left(1 - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{A_m^*}{kN_m} \right) \right) \left(\frac{B\beta_m I_h^*}{N_h} \right)
\end{aligned}$$

Untuk nilai d_1 dapat dianalisis sebagai berikut :

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{c_1}$$

nilai d_1 akan bernilai positif jika $c_1 b_2 > c_2 b_1$
maka akibatnya nilai $b_2 > 0$ jika $a_1 a_4 > a_0 a_5$

$$(f - a - c - h + k)(acf h - acf k - 2acfl - achk - 2achl + ackl + acl^2 - afhk - 2afhl + afkl - afl^2 + ahkl + ahl^2 + 2aijl + aijk - adgm - cfhk - 2cfhl + cfkl + cfl^2 + chkl + chl^2 + 2cijl + cijk + fhkl + fhl^2 + 2fijl + fijk - 2dgkm + dghm - dglm + bgm) > (acf hk + 2acfhl - acfkl - acfl^2 - achkl - achl^2 - 2acijl - acijk - afhkl - afhl^2 - 2afijl - afijk - adghm + adglm - cfhkl - cfhl^2 - 2cfijl - cfijk + 2dghkm + dghlm - dijm + bdgkm - bghm + bgkm + bgml)$$

Untuk nilai e_1 dapat dianalisis sebagai berikut :

$$e_1 = \frac{d_1 c_2 - d_2 c_1}{d_1}$$

nilai e_1 akan bernilai positif jika $d_1 c_2 > d_2 c_1$
maka akibatnya nilai $c_2 > 0$ jika $b_1 a_5 > b_3 a_1$

Dari tabel Routh-Hurwitz dapat dilihat bahwa variabel-variabel pada kolom pertama memiliki nilai yang sama yaitu bertanda positif. Titik kesetimbangan endemik untuk model epidemiologi SEIR demam berdarah terbukti stabil asimtotik lokal jika memenuhi $a_1 > 0, a_1 a_2 > a_0 a_3, b_1 a_3 > b_2 a_1, c_1 b_2 > c_2 b_1$, dan $d_1 c_2 > d_2 c_1$.

4.5 Menentukan Bilangan Reroduksi Dasar

Dalam model epidemiologi, bilangan reproduksi dasar yang dilambangkan dengan \mathcal{R}_0 adalah konsep kunci dan didefinisikan sebagai jumlah rata-rata infeksi sekunder yang timbul dari individu yang terinfeksi primer yang masuk ke kelas *susceptible* selama periode infeksi *susceptible*.

Dengan menggunakan metode *Driessche* dan *Watmough* [7] akan ditentukan bilangan reproduksi dasar sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 \frac{dE_h}{dt} &= \beta_h I_m \frac{S_h}{N_h} + p S_h - (\mu_h + \gamma_h) E_h \\
 \frac{dI_h}{dt} &= \gamma_h E_h - (\eta_h + \mu_h) I_h \\
 \frac{dI_m}{dt} &= B \beta_m \frac{I_h}{N_h} S_m - \mu_m I_m \\
 \frac{dS_h}{dt} &= \mu_h^* N_h - B \beta_h I_m \frac{S_h}{N_h} - p S_h - \mu_h S_h \\
 \frac{dA_m}{dt} &= \varphi \left(1 - \frac{A_m}{k N_h} \right) (S_m + I_m) - (\eta_m + \mu_m) A_m \\
 \frac{dS_m}{dt} &= \eta_m A_m - \left(B \beta_m \frac{I_h}{N_h} + \mu_m \right) S_m
 \end{aligned} \tag{4.98}$$

\mathcal{F}_i adalah laju kemunculan infeksi baru pada kompartemen i ,

\mathcal{V}_i^- adalah laju dari perpindahan individu keluar dari kompartemen i ,

\mathcal{V}_i^+ adalah laju dari perpindahan individu masuk ke dalam kompartemen i

$$\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_i^- - \mathcal{V}_i^+$$

Untuk sistem persamaan (4.81) \mathcal{F} dan \mathcal{V} adalah:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_i &= \begin{bmatrix} B \beta_h I_m \frac{S_h}{N_h} + p S_h \\ 0 \\ B \beta_m \frac{I_h}{N_h} S_m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan} \\
 \mathcal{V}_i &= \begin{bmatrix} \mu_h E_h + \gamma_h E_h \\ (\eta_h + \mu_h) I_h - \gamma_h E_h \\ \mu_m I_m \\ B \beta_h I_m + p S_h + \mu_h S_h - \mu_h^* N_h \\ (\eta_m + \mu_m) A_m - \varphi \left(1 - \frac{A_m}{k N_h} \right) (S_m + I_m) \\ \left(B \beta_m \frac{I_h}{N_h} + \mu_m \right) S_m - \eta_m A_m \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Kompartemen yang terinfeksi adalah E_h dan I_h ke I_m , maka didapatkan $m=3$. Sehingga diperoleh

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{E_h}}{\partial E_h} & \frac{\partial F_{E_h}}{\partial I_h} & \frac{\partial F_{E_h}}{\partial I_m} \\ \frac{\partial F_{I_h}}{\partial E_h} & \frac{\partial F_{I_h}}{\partial I_h} & \frac{\partial F_{I_h}}{\partial I_m} \\ \frac{\partial F_{I_m}}{\partial E_h} & \frac{\partial F_{I_m}}{\partial I_h} & \frac{\partial F_{I_m}}{\partial I_m} \end{bmatrix} \text{ dan } V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_{E_h}}{\partial E_h} & \frac{\partial V_{E_h}}{\partial I_h} & \frac{\partial V_{E_h}}{\partial I_m} \\ \frac{\partial V_{I_h}}{\partial E_h} & \frac{\partial V_{I_h}}{\partial I_h} & \frac{\partial V_{I_h}}{\partial I_m} \\ \frac{\partial V_{I_m}}{\partial E_h} & \frac{\partial V_{I_m}}{\partial I_h} & \frac{\partial V_{I_m}}{\partial I_m} \end{bmatrix}$$

maka akan didapatkan matriks sebagai berikut :

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B\beta_h \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & B\beta_m & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } V = \begin{bmatrix} \mu_h + \gamma_h & 0 & 0 \\ -\gamma_h & \eta_h + \mu_h & 0 \\ 0 & 0 & \mu_m \end{bmatrix}$$

Berdasarkan *Definisi 2.1* matriks V merupakan M-matriks non singular jika dan hanya jika terdapat bilangan k dan matriks P sedemikian hingga terdapat $k > \rho(P)$ yang memenuhi $V = kI - P$. Kemudian akan dibuktikan bahwa V merupakan M-matriks non singular.

$$V = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\gamma_h + \eta_h + \mu_m & 0 & 0 \\ \gamma_h & \gamma_h + \mu_m & 0 \\ 0 & 0 & \mu_h + \eta_h \end{pmatrix}$$

Dengan $k = \mu_h + \eta_h + \mu_m$ dan $\rho(P) = \mu_h + \eta_h$, sehingga $k = \mu_h + \eta_h + \mu_m > \rho(P)$. Jadi terbukti bahwa matriks V merupakan M-matriks non singular.

Untuk mencari V^{-1} , maka dapat menggunakan rumus seperti berikut :

$$V^{-1} = \frac{1}{\det(V)} \cdot \text{adj}(V)$$

$$V^{-1} =$$

$$\frac{1}{(\gamma_h + \mu_h)(\eta_h + \mu_h)\mu_m} \begin{bmatrix} (\eta_h + \mu_h)\mu_m & 0 & 0 \\ \gamma_h\mu_m & (\gamma_h + \mu_h)\mu_m & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma_h + \mu_h)(\eta_h + \mu_h) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} (\eta_h + \mu_h)\mu_m & 0 & 0 \\ \gamma_h\mu_m & (\gamma_h + \mu_h)\mu_m & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma_h + \mu_h)(\eta_h + \mu_h) \end{bmatrix}}{(\gamma_h + \mu_h)(\eta_h + \mu_h)\mu_m}$$

Kemudian mencari nilai eigen \mathcal{R}_0 yaitu $\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1})$ sehingga

$$FV^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & B\beta_h \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & B\beta_m & 0 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} (\eta_h + \mu_h)\mu_m & 0 & 0 \\ \gamma_h\mu_m & (\gamma_h + \mu_h)\mu_m & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma_h + \mu_h)(\eta_h + \mu_h) \end{bmatrix}}{(\gamma_h + \mu_h)(\eta_h + \mu_h)\mu_m}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 & (\gamma_h + \mu_h)(\eta_h + \mu_h)B\beta_h \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma_h\mu_m B\beta_m & (\gamma_h + \mu_h)\mu_m B\beta_m & 0 \end{bmatrix}}{(\gamma_h + \mu_h)(\eta_h + \mu_h)\mu_m}$$

Didapatkan hasil dari perkalian matriks tersebut adalah

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 \\ A & B & 0 \end{bmatrix}$$

dengan

$$A = \frac{\gamma_h B \beta_m}{(\gamma_h + \mu_h)(\eta_h + \mu_h)}$$

$$B = \frac{B \beta_m}{(\gamma_h + \mu_h)}$$

$$C = \frac{B \beta_h}{\mu_m N_h}$$

Jadi nilai eigen dari matriks *next generation* diperoleh dengan menyelesaikan $\det[\lambda I - FV^{-1}] = 0$ sehingga didapat

$$\det \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -C \\ 0 & \lambda & 0 \\ -A & -B & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - ((-A)(-C))\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - AC) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\sqrt{AC}, \lambda_3 = \sqrt{AC}$$

Bilangan reproduksi dasar adalah *spectral radius* dari operator generasi selanjutnya, yaitu

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_0 &= \rho(FV^{-1}) \\ &= \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} \\ &= \max\{0, |-\sqrt{AC}|, |\sqrt{AC}|\} \\ \mathcal{R}_0^2 &= AC \\ &= \frac{\gamma_h B^2 \beta_m \beta_h}{(\gamma_h + \mu_h)(\eta_h + \mu_h)\mu_m}\end{aligned}$$

Maka *Basic Reproduction Number* dari model adalah :

$$\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1})$$

$$\mathcal{R}_0 = \sqrt{\frac{\gamma_h B^2 \beta_m \beta_h}{(\gamma_h + \mu_h)(\eta_h + \mu_h)\mu_m}}$$

Dari bilangan reproduksi dasar diperoleh

$$\mathcal{R}_0^2 = \frac{\gamma_h B^2 \beta_m \beta_h}{(\gamma_h + \mu_h)(\eta_h + \mu_h)\mu_m} \quad (4.99)$$

$$\frac{\mathcal{R}_0^2}{B\beta_h} = \frac{\gamma_h B\beta_m}{(\gamma_h + \mu_h)(\eta_h + \mu_h)\mu_m} \quad (4.100)$$

Berdasarkan nilai \mathcal{R}_0 yang diperoleh, akan dicari formulasi dari rate transmission β_h . Karena $\mathcal{R}_0 \equiv \beta_h$ maka untuk $\mathcal{R}_0 = 1$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \sqrt{\frac{\gamma_h B^2 \beta_m \beta_h}{(\gamma_h + \mu_h)(\eta_h + \mu_h)\mu_m}} &= 1 \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{\gamma_h B^2 \beta_m \beta_h}{(\gamma_h + \mu_h)(\eta_h + \mu_h)\mu_m}} \right)^2 &= 1^2 \\ \Leftrightarrow \frac{\gamma_h B^2 \beta_m \beta_h}{(\gamma_h + \mu_h)(\eta_h + \mu_h)\mu_m} &= 1 \\ \Leftrightarrow \beta_h &= \frac{(\gamma_h + \mu_h)(\eta_h + \mu_h)\mu_m}{\gamma_h B^2 \beta_m} \\ \Leftrightarrow \beta_h &= \left(1 + \frac{\mu_h}{\gamma_h} \right) \frac{(\eta_h + \mu_h)\mu_m}{B^2 \beta_m}\end{aligned}$$

dengan memasukkan nilai jumlah orang yang sembuh yaitu $\eta_h = \text{jumlah penderita} - \text{jumlah yang meninggal}$, berdasarkan data yang diperoleh dari Dinas Kesehatan Kota Surabaya.

Sehingga untuk *rate transmission* demam berdarah di Surabaya

$$\text{yaitu } \beta_h \geq \beta_{h_{min}} = \left(1 + \frac{\mu_h}{\gamma_h}\right) \frac{(\eta_h + \mu_h)\mu_m}{B^2\beta_m}$$

4.6 Analisis Bifurkasi

Pada sub bab ini akan membahas mengenai cara menentukan persamaan untuk menemukan kurva bifurkasi dari model interaksi dinamis. Kemudian menyajikannya dalam bentuk

Dalam hal ini, menggunakan titik kesetimbangan endemik untuk mencari persamaan \mathcal{R}_0 yang optimum untuk membuat kurva bifurkasinya sehingga untuk \mathcal{R}_0 yang lebih kecil dari nilai optimum tidak terjadi penyebaran penyakit menular. Diketahui sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(I_m^*) &= AI_m^{*4} + BI_m^{*3} + CI_m^{*2} + DI_m^* = 0 \\ f(I_m^*) &= (AI_m^{*3} + BI_m^{*2} + CI_m^* + D)I_m^* = 0 \end{aligned} \quad (4.101)$$

dengan

$$\begin{aligned} A &= (-\varphi\mu_m^2B^3\beta_h^2\beta_m\mu_h^*\gamma_h(\eta_h + \mu_h)(\mu_h + \gamma_h) - \\ &\quad \varphi\mu_m\mu_h^{*2}N_hB^4\beta_h^2\beta_m^2\gamma_h^2) \\ B &= (-\varphi\mu_m^2B^2\beta_h\beta_m\mu_h^*\gamma_h(\eta_h + \mu_h)(\mu_h + \gamma_h)(pN_h + \mu_hN_h) - \\ &\quad 2\varphi\mu_m\mu_h^{*2}N_h^2pB^3\beta_h\beta_m^2\gamma_h^2 + \varphi kN_h\eta_m\mu_m\mu_hB^3\beta_h\beta_m^2\gamma_h(\eta_h + \\ &\quad \mu_h)(\mu_h + \gamma_h) + \varphi kN_h^2\eta_m\mu_h^{*2}B^4\beta_h^2\beta_m^2\gamma_h^2 - \\ &\quad \varphi\mu_m^2\mu_h^*B^2\beta_h\beta_m\gamma_hpN_h(\eta_h + \mu_h)(\mu_h + \gamma_h) - \\ &\quad \mu_m\mu_h^{*2}kN_hB^4\beta_h\beta_m^2\gamma_h^2(\eta_m + \mu_m) - \\ &\quad \mu_m^2\mu_h^*B^3\beta_h^2\beta_m\gamma_hkN_h(\eta_h + \mu_h)(\mu_h + \gamma_h)(\eta_m + \mu_m)) \end{aligned}$$

$$C = \left(\varphi k N_h \mu_m \mu_h^* B^2 \beta_h \beta_m \gamma_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (p N_h + \mu_h N_h) + 2 \varphi p k N_h^3 \eta_m \mu_h^{*2} B^3 \beta_h \beta_m^2 \gamma_h^2 - \varphi \mu_m^2 \mu_h^* B \beta_m \gamma_h p N_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) - \varphi \mu_m \mu_h^{*2} N_h^3 p^2 B^2 \beta_m^2 \gamma_h^2 + \varphi k N_h^2 \eta_m \mu_m \mu_h^* B^2 \beta_m \beta_m \gamma_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) + \varphi \mu_m^2 B \beta_h (\eta_h + \mu_h)^2 (\mu_h + \gamma_h)^2 (p N_h + \mu_h N_h) + \varphi N_h \mu_m \mu_h^* B^2 \beta_h \beta_m \gamma_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (p N_h + \mu_h N_h) - 2 \mu_m \mu_h^{*2} N_h^2 k p B^3 \beta_m^2 \beta_h \gamma_h^2 (\eta_m + \mu_m) - \mu_m^2 \mu_h^* N_h^2 k p B^2 \beta_h \beta_m \gamma_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (\eta_m + \mu_m) - \mu_m^2 \mu_h^* N_h k B^2 \beta_h \beta_m \gamma_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (\eta_m + \mu_m) (p N_h + \mu_h N_h) \right)$$

$$D = \left(\varphi k N_h^2 p \eta_m \mu_m \mu_h^* B \beta_m \gamma_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (p N_h + \mu_h N_h) + \varphi k N_h^4 p^2 \eta_m \mu_h^{*2} B^2 \beta_m^2 \gamma_h^2 + \varphi \mu_m^2 (\eta_h + \mu_h)^2 (\mu_h + \gamma_h)^2 (p N_h + \mu_h N_h)^2 + \varphi \mu_m \mu_h^* N_h^2 p B \beta_m \gamma_h (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (p N_h + \mu_h N_h) - \mu_m^2 \mu_h^{*2} N_h k B^2 \beta_m^2 \gamma_h^2 (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (\eta_m + \mu_m) (p N_h)^3 - k p^2 \mu_m^2 \mu_h^{*3} N_h^4 B^2 \beta_m^2 \gamma_h^2 (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (\eta_m + \mu_m) \right)$$

Pada persamaan (4.84) dapat diperoleh akar – akar dari persamaan sebagai berikut

$$I_{m_1}^* = 0$$

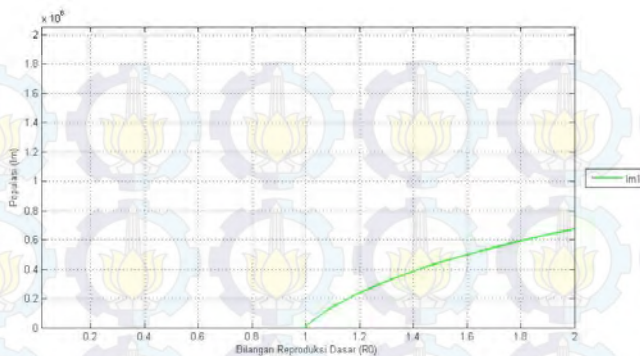
$$I_{m_2}^* = -\frac{B}{3A}$$

$$-\frac{\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}(-B^2+3AC)}}{3A(-2B^3+9ABC-27A^2D+\sqrt{4(-B^2+3AC)^3+(-2B^3+9ABC-27A^2D)^2})^{\frac{1}{3}}} + \frac{(-2B^3+9ABC-27A^2D+\sqrt{4(-B^2+3AC)^3+(-2B^3+9ABC-27A^2D)^2})^{\frac{1}{3}}}{3x2^{\frac{1}{3}}A}$$

$$I_{m_3}^* = -\frac{B}{3A} + \left((1+i\sqrt{3})(-B^2+3AC) \right) / \left(3x2^{\frac{2}{3}}A(-2B^3+9ABC-27A^2D+\sqrt{4(-B^2+3AC)^3+(-2B^3+9ABC-27A^2D)^2})^{\frac{1}{3}} - \right)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6x2^{\frac{1}{3}}A} \Bigg) \left(1 - \right. \\
& i\sqrt{3} \Bigg) \left(-2B^3 + 9ABC - 27A^2D + \right. \\
& \left. \sqrt{4(-B^2 + 3AC)^3 + (-2B^3 + 9ABC - 27A^2D)^2} \right)^{\frac{1}{3}} \\
I_{m_4}^* &= -\frac{B}{3A} \\
& + \left((1 + i\sqrt{3})(-B^2 + 3AC) \right) \\
& / \left(3x2^{\frac{2}{3}}A \left(-2B^3 + 9ABC - 27A^2D \right. \right. \\
& \left. \left. + \sqrt{4(-B^2 + 3AC)^3 + (-2B^3 + 9ABC - 27A^2D)^2} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{6x2^{\frac{1}{3}}A} \right) \left(1 \right. \\
& \left. + i\sqrt{3} \right) \left(-2B^3 + 9ABC - 27A^2D \right. \\
& \left. + \sqrt{4(-B^2 + 3AC)^3 + (-2B^3 + 9ABC - 27A^2D)^2} \right)^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

Selanjutnya akan disimulasikan untuk menghasilkan kurva bifurkasi dengan sumbu (x,y). Pada gambar (4.1) merupakan hasil kurva bifurkasi dengan $\mu_h = 0.000385, \mu_m = 0.1, B = 0.8, \beta_m = 0.375, p = 0.09, \gamma_h = 0.1667, \eta_m = 0.08, \varphi = 0.0369128, k = 3, N_h = 480.000$ data diperoleh dari penelitian Noorani M.S.M [4] dan $\eta_h = 7, \beta_h = 2.9236$ data yang diperoleh dari Dinas Kesehatan Kota Surabaya. Dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 4.1 Kurva Bifurkasi

Pada gambar 4.1 menunjukkan bahwa saat $I_{m_1} = 0$ maka populasi I_m tidak ada atau tidak terjadi penyebaran penyakit demam berdarah oleh nyamuk. Sedangkan pada $I_{m_2} \neq 0$ adanya penyebaran demam berdarah oleh nyamuk. Bifurkasi maju terjadi ketika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka tidak ada penyebaran penyakit. Sedangkan ketika $\mathcal{R}_0 > 1$ ada satu titik kesetimbangan endemik sehingga terjadi penyebaran penyakit.

4.7 Solusi Numerik dan Simulasi

Pada sub bab ini dibahas cara untuk memperoleh solusi numerik dari model interaksi dinamis dan simulasi numeriknya. Hal ini bertujuan untuk memudahkan dalam menganalisa model dan untuk mengetahui selisih atau *error* antara nilai eksak dengan nilai numerik.

Penyelesaian numerik yang digunakan adalah metode Runge-Kutta orde empat. Metode Runge-Kutta mencapai keakuratan dari suatu pendekatan Taylor tanpa memerlukan turunan-turunan tingkat tinggi. Metode Runge-kutta orde empat adalah satu dari metode yang banyak digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Metode ini mempunyai

suatu galat pemotongan h^4 . Integrasi numerik dari persamaan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dinyatakan sebagai berikut:

Dimisalkan untuk nilai awal adalah sebagai berikut:

$$S_h(t_0) = S_{h_0}$$

$$E_h(t_0) = E_{h_0}$$

$$I_h(t_0) = I_{h_0}$$

$$A_m(t_0) = A_{m_0}$$

$$S_m(t_0) = S_{m_0}$$

$$I_m(t_0) = I_{m_0}$$

Integrasi numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dinyatakan sebagai berikut:

$$S_{h_{n+1}} = S_{h_n} + \frac{1}{6}(k_{1,S_h} + 2k_{2,S_h} + 2k_{3,S_h} + k_{4,S_h})$$

$$E_{h_{n+1}} = E_{h_n} + \frac{1}{6}(k_{1,E_h} + 2k_{2,E_h} + 2k_{3,E_h} + k_{4,E_h})$$

$$I_{h_{n+1}} = I_{h_n} + \frac{1}{6}(k_{1,I_h} + 2k_{2,I_h} + 2k_{3,I_h} + k_{4,I_h})$$

$$A_{m_{n+1}} = A_{m_n} + \frac{1}{6}(k_{1,A_m} + 2k_{2,A_m} + 2k_{3,A_m} + k_{4,A_m})$$

$$S_{m_{n+1}} = S_{m_n} + \frac{1}{6}(k_{1,S_m} + 2k_{2,S_m} + 2k_{3,S_m} + k_{4,S_m})$$

$$I_{m_{n+1}} = I_{m_n} + \frac{1}{6}(k_{1,I_m} + 2k_{2,I_m} + 2k_{3,I_m} + k_{4,I_m})$$

dengan

$$k_{1,S_h} = hf(t_n, S_{h_n}, E_{h_n}, I_{h_n}, A_{m_n}, S_{m_n}, I_{m_n})$$

$$\begin{aligned}
&= h \left(\mu_h^* N_h - \left(B\beta_h \frac{I_{m_n}}{N_h} + p + \mu_h \right) S_{h_n} \right) \\
&= h \left(\mu_h^* N_h - B\beta_h S_{h_n} - p S_{h_n} - \mu_h S_{h_n} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{1,E_h} &= hf(t_n, S_{h_n}, E_{h_n}, I_{h_n}, A_{m_n}, S_{m_n}, I_{m_n}) \\
&= h \left(\left(\frac{B\beta_h I_{m_n}}{N_h} + p \right) S_{h_n} - (\mu_h + \gamma_h) E_{h_n} \right) \\
&= h \left(\frac{B\beta_h I_{m_n} S_{h_n}}{N_h} + p S_{h_n} - \mu_h E_{h_n} - \gamma_h E_{h_n} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{1,I_h} &= hf(t_n, S_{h_n}, E_{h_n}, I_{h_n}, A_{m_n}, S_{m_n}, I_{m_n}) \\
&= h \left(\gamma_h E_{h_n} - (\eta_h + \mu_h) I_{h_n} \right) \\
&= h \left(\gamma_h E_{h_n} - \eta_h I_{h_n} - \mu_h I_{h_n} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{1,A_m} &= hf(t_n, S_{h_n}, E_{h_n}, I_{h_n}, A_{m_n}, S_{m_n}, I_{m_n}) \\
&= h \left(\varphi \left(1 - \frac{A_{m_n}}{kN_h} \right) (S_{m_n} + I_{m_n}) - (\eta_m + \mu_m) A_{m_n} \right) \\
&= h \left(\varphi S_{m_n} - \frac{\varphi A_{m_n}}{kN_h} S_{m_n} + \varphi I_{m_n} - \frac{\varphi A_{m_n}}{kN_h} I_{m_n} - \right. \\
&\quad \left. \eta_m A_{m_n} - \mu_m A_{m_n} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{1,S_m} &= hf(t_n, S_{h_n}, E_{h_n}, I_{h_n}, A_{m_n}, S_{m_n}, I_{m_n}) \\
&= h \left(\eta_m A_{m_n} - \left(B\beta_m \frac{I_{h_n}}{N_h} + \mu_m \right) S_{m_n} \right) \\
&= h \left(\eta_m A_{m_n} - B\beta_m \frac{I_{h_n}}{N_h} S_{m_n} - \mu_m S_{m_n} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{1,I_m} &= hf(t_n, S_{h_n}, E_{h_n}, I_{h_n}, A_{m_n}, S_{m_n}, I_{m_n}) \\
&= h \left(B\beta_m \frac{I_{h_n}}{N_h} S_{m_n} - \mu_m I_{m_n} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{2,S_h} &= hf \left(t_n + \frac{h}{2}, S_{h_n} + \frac{k_{1,S_{h_n}}}{2}, E_{h_n} + \frac{k_{1,E_{h_n}}}{2}, I_{h_n} + \right. \\
&\quad \left. \frac{k_{1,I_{h_n}}}{2}, A_{m_n} + \frac{k_{1,A_{m_n}}}{2}, S_{m_n} + \frac{k_{1,S_{m_n}}}{2}, I_{m_n} + \frac{k_{1,I_{m_n}}}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$= h \left(\mu_h^* N_h - B \beta_h \left(S_{hn} + \frac{k_{1,S_{hn}}}{2} \right) - p \left(S_{hn} + \frac{k_{1,S_{hn}}}{2} \right) - \mu_h \left(S_{hn} + \frac{k_{1,S_{hn}}}{2} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} k_{2,E_h} &= hf \left(t_n + \frac{h}{2}, S_{hn} + \frac{k_{1,S_{hn}}}{2}, E_{hn} + \frac{k_{1,E_{hn}}}{2}, I_{hn} + \frac{k_{1,I_{hn}}}{2}, A_{mn} + \frac{k_{1,A_{mn}}}{2}, S_{mn} + \frac{k_{1,S_{mn}}}{2}, I_{mn} + \frac{k_{1,I_{mn}}}{2} \right) \\ &= h \left(\frac{B \beta_h}{N_h} \left(I_{mn} + \frac{k_{1,I_{mn}}}{2} \right) \left(S_{hn} + \frac{k_{1,S_{hn}}}{2} \right) + p \left(S_{hn} + \frac{k_{1,S_{hn}}}{2} \right) - \mu_h \left(E_{hn} + \frac{k_{1,E_{hn}}}{2} \right) - \gamma_h \left(E_{hn} + \frac{k_{1,E_{hn}}}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{2,I_h} &= hf \left(t_n + \frac{h}{2}, S_{hn} + \frac{k_{1,S_{hn}}}{2}, E_{hn} + \frac{k_{1,E_{hn}}}{2}, I_{hn} + \frac{k_{1,I_{hn}}}{2}, A_{mn} + \frac{k_{1,A_{mn}}}{2}, S_{mn} + \frac{k_{1,S_{mn}}}{2}, I_{mn} + \frac{k_{1,I_{mn}}}{2} \right) \\ &= h \left(\gamma_h \left(E_{hn} + \frac{k_{1,E_{hn}}}{2} \right) - \eta_h \left(I_{hn} + \frac{k_{1,I_{hn}}}{2} \right) - \mu_h \left(I_{hn} + \frac{k_{1,I_{hn}}}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{2,A_m} &= hf \left(t_n + \frac{h}{2}, S_{hn} + \frac{k_{1,S_{hn}}}{2}, E_{hn} + \frac{k_{1,E_{hn}}}{2}, I_{hn} + \frac{k_{1,I_{hn}}}{2}, A_{mn} + \frac{k_{1,A_{mn}}}{2}, S_{mn} + \frac{k_{1,S_{mn}}}{2}, I_{mn} + \frac{k_{1,I_{mn}}}{2} \right) \\ &= h \left(\varphi \left(S_{mn} + \frac{k_{1,S_{mn}}}{2} \right) - \frac{\varphi}{k N_h} \left(A_{mn} + \frac{k_{1,A_{mn}}}{2} \right) \left(S_{mn} + \frac{k_{1,S_{mn}}}{2} \right) + \varphi \left(I_{mn} + \frac{k_{1,I_{mn}}}{2} \right) - \frac{\varphi}{k N_h} \left(A_{mn} + \frac{k_{1,A_{mn}}}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{k_{1,A_{mn}}}{2} \Big) \Big(I_{mn} + \frac{k_{1,I_{mn}}}{2} \Big) - \eta_m \Big(A_{mn} + \frac{k_{1,A_{mn}}}{2} \Big) - \\
& \mu_m \Big(A_{mn} + \frac{k_{1,A_{mn}}}{2} \Big) \Big) \\
k_{2,S_m} &= hf \Big(t_n + \frac{h}{2}, S_{h_n} + \frac{k_{1,S_{h_n}}}{2}, E_{h_n} + \frac{k_{1,E_{h_n}}}{2}, I_{h_n} + \\
& \frac{k_{1,I_{h_n}}}{2}, A_{mn} + \frac{k_{1,A_{mn}}}{2}, S_{mn} + \frac{k_{1,S_{mn}}}{2}, I_{mn} + \frac{k_{1,I_{mn}}}{2} \Big) \\
&= h \Big(\eta_m \Big(A_{mn} + \frac{k_{1,A_{mn}}}{2} \Big) - \frac{B\beta_m}{N_h} \Big(I_{h_n} + \frac{k_{1,I_{h_n}}}{2} \Big) \Big(S_{mn} + \\
& \frac{k_{1,S_{mn}}}{2} \Big) - \mu_m \Big(S_{mn} + \frac{k_{1,S_{mn}}}{2} \Big) \Big) \\
k_{2,I_m} &= hf \Big(t_n + \frac{h}{2}, S_{h_n} + \frac{k_{1,S_{h_n}}}{2}, E_{h_n} + \frac{k_{1,E_{h_n}}}{2}, I_{h_n} + \\
& \frac{k_{1,I_{h_n}}}{2}, A_{mn} + \frac{k_{1,A_{mn}}}{2}, S_{mn} + \frac{k_{1,S_{mn}}}{2}, I_{mn} + \frac{k_{1,I_{mn}}}{2} \Big) \\
&= h \Big(\frac{B\beta_m}{N_h} \Big(I_{h_n} + \frac{k_{1,I_{h_n}}}{2} \Big) \Big(S_{mn} + \frac{k_{1,S_{mn}}}{2} \Big) - \mu_m \Big(I_{mn} + \\
& \frac{k_{1,I_{mn}}}{2} \Big) \Big) \\
k_{3,S_h} &= hf \Big(t_n + \frac{h}{2}, S_{h_n} + \frac{k_{2,S_{h_n}}}{2}, E_{h_n} + \frac{k_{2,E_{h_n}}}{2}, I_{h_n} + \\
& \frac{k_{2,I_{h_n}}}{2}, A_{mn} + \frac{k_{2,A_{mn}}}{2}, S_{mn} + \frac{k_{2,S_{mn}}}{2}, I_{mn} + \frac{k_{2,I_{mn}}}{2} \Big) \\
&= h \Big(\mu_h^* N_h - B\beta_h \Big(S_{h_n} + \frac{k_{2,S_{h_n}}}{2} \Big) - p \Big(S_{h_n} + \frac{k_{2,S_{h_n}}}{2} \Big) - \\
& \mu_h \Big(S_{h_n} + \frac{k_{2,S_{h_n}}}{2} \Big) \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{3,E_h} &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, S_{h_n} + \frac{k_{2,S_{h_n}}}{2}, E_{h_n} + \frac{k_{2,E_{h_n}}}{2}, I_{h_n} + \frac{k_{2,I_{h_n}}}{2}, A_{m_n} + \frac{k_{2,A_{m_n}}}{2}, S_{m_n} + \frac{k_{2,S_{m_n}}}{2}, I_{m_n} + \frac{k_{2,I_{m_n}}}{2}\right) \\
&= h \left(\frac{B\beta_h}{N_h} \left(I_{m_n} + \frac{k_{2,I_{m_n}}}{2} \right) \left(S_{h_n} + \frac{k_{2,S_{h_n}}}{2} \right) + p \left(S_{h_n} + \frac{k_{2,S_{h_n}}}{2} \right) - \mu_h \left(E_{h_n} + \frac{k_{2,E_{h_n}}}{2} \right) - \gamma_h \left(E_{h_n} + \frac{k_{2,E_{h_n}}}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{3,I_h} &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, S_{h_n} + \frac{k_{2,S_{h_n}}}{2}, E_{h_n} + \frac{k_{2,E_{h_n}}}{2}, I_{h_n} + \frac{k_{2,I_{h_n}}}{2}, A_{m_n} + \frac{k_{2,A_{m_n}}}{2}, S_{m_n} + \frac{k_{2,S_{m_n}}}{2}, I_{m_n} + \frac{k_{2,I_{m_n}}}{2}\right) \\
&= h \left(\gamma_h \left(E_{h_n} + \frac{k_{2,E_{h_n}}}{2} \right) - \eta_h \left(I_{h_n} + \frac{k_{2,I_{h_n}}}{2} \right) - \mu_h \left(I_{h_n} + \frac{k_{2,I_{h_n}}}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{3,A_m} &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, S_{h_n} + \frac{k_{2,S_{h_n}}}{2}, E_{h_n} + \frac{k_{2,E_{h_n}}}{2}, I_{h_n} + \frac{k_{2,I_{h_n}}}{2}, A_{m_n} + \frac{k_{2,A_{m_n}}}{2}, S_{m_n} + \frac{k_{2,S_{m_n}}}{2}, I_{m_n} + \frac{k_{2,I_{m_n}}}{2}\right) \\
&= h \left(\varphi \left(S_{m_n} + \frac{k_{2,S_{m_n}}}{2} \right) - \frac{\varphi}{kN_h} \left(A_{m_n} + \frac{k_{2,A_{m_n}}}{2} \right) \left(S_{m_n} + \frac{k_{2,S_{m_n}}}{2} \right) + \varphi \left(I_{m_n} + \frac{k_{2,I_{m_n}}}{2} \right) - \frac{\varphi}{kN_h} \left(A_{m_n} + \frac{k_{2,A_{m_n}}}{2} \right) \left(I_{m_n} + \frac{k_{2,I_{m_n}}}{2} \right) - \eta_m \left(A_{m_n} + \frac{k_{2,A_{m_n}}}{2} \right) - \mu_m \left(A_{m_n} + \frac{k_{2,A_{m_n}}}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{3,S_m} &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, S_{h_n} + \frac{k_{2,S_{h_n}}}{2}, E_{h_n} + \frac{k_{2,E_{h_n}}}{2}, I_{h_n} + \frac{k_{2,I_{h_n}}}{2}, A_{m_n} + \frac{k_{2,A_{m_n}}}{2}, S_{m_n} + \frac{k_{2,S_{m_n}}}{2}, I_{m_n} + \frac{k_{2,I_{m_n}}}{2}\right) \\
 &= h\left(\eta_m\left(A_{m_n} + \frac{k_{2,A_{m_n}}}{2}\right) - \frac{B\beta_m}{N_h}\left(I_{h_n} + \frac{k_{2,I_{h_n}}}{2}\right)\left(S_{m_n} + \frac{k_{2,S_{m_n}}}{2}\right) - \mu_m\left(S_{m_n} + \frac{k_{2,S_{m_n}}}{2}\right)\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{3,I_m} &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, S_{h_n} + \frac{k_{2,S_{h_n}}}{2}, E_{h_n} + \frac{k_{2,E_{h_n}}}{2}, I_{h_n} + \frac{k_{2,I_{h_n}}}{2}, A_{m_n} + \frac{k_{2,A_{m_n}}}{2}, S_{m_n} + \frac{k_{2,S_{m_n}}}{2}, I_{m_n} + \frac{k_{2,I_{m_n}}}{2}\right) \\
 &= h\left(\frac{B\beta_m}{N_h}\left(I_{h_n} + \frac{k_{2,I_{h_n}}}{2}\right)\left(S_{m_n} + \frac{k_{2,S_{m_n}}}{2}\right) - \mu_m\left(I_{m_n} + \frac{k_{2,I_{m_n}}}{2}\right)\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{4,S_h} &= hf\left(t_0, S_{h_n} + k_{3,S_{h_n}}, E_{h_n} + k_{3,E_{h_n}}, I_{h_n} + k_{3,I_{h_n}}, A_{m_n} + k_{3,A_{m_n}}, S_{m_n} + k_{3,S_{m_n}}, I_{m_n} + k_{3,I_{m_n}}\right) \\
 &= h\left(\mu_h^* N_h - B\beta_h\left(S_{h_n} + k_{3,S_{h_n}}\right) - p\left(S_{h_n} + k_{3,S_{h_n}}\right) - \mu_h\left(S_{h_n} + k_{3,S_{h_n}}\right)\right)
 \end{aligned}$$

$$k_{4,E_h} = hf\left(t_0, S_{h_n} + k_{3,S_{h_n}}, E_{h_n} + k_{3,E_{h_n}}, I_{h_n} + k_{3,I_{h_n}}, A_{m_n} + k_{3,A_{m_n}}, S_{m_n} + k_{3,S_{m_n}}, I_{m_n} + k_{3,I_{m_n}}\right)$$

$$= h \left(\frac{B\beta_h}{N_h} (I_{m_n} + k_{3,I_{m_n}}) (S_{h_n} + k_{3,S_{h_n}}) + p (S_{h_n} + k_{3,S_{h_n}}) - \mu_h (E_{h_n} + k_{3,E_{h_n}}) - \gamma_h (E_{h_n} + k_{3,E_{h_n}}) \right)$$

$$k_{4,I_h} = hf \left(t_0, S_{h_n} + k_{3,S_{h_n}}, E_{h_n} + k_{3,E_{h_n}}, I_{h_n} + k_{3,I_{h_n}}, A_{m_n} + k_{3,A_{m_n}}, S_{m_n} + k_{3,S_{m_n}}, I_{m_n} + k_{3,I_{m_n}} \right)$$

$$= h \left(\gamma_h (E_{h_n} + k_{3,E_{h_n}}) - \eta_h (I_{h_n} + k_{3,I_{h_n}}) - \mu_h (I_{h_n} + k_{3,I_{h_n}}) \right)$$

$$k_{4,A_m} = hf \left(t_0, S_{h_n} + k_{3,S_{h_n}}, E_{h_n} + k_{3,E_{h_n}}, I_{h_n} + k_{3,I_{h_n}}, A_{m_n} + k_{3,A_{m_n}}, S_{m_n} + k_{3,S_{m_n}}, I_{m_n} + k_{3,I_{m_n}} \right)$$

$$= h \left(\varphi (S_{m_n} + k_{3,S_{m_n}}) - \frac{\varphi}{kN_h} (A_{m_n} + k_{3,A_{m_n}}) (S_{m_n} + k_{3,S_{m_n}}) + \varphi (I_{m_n} + k_{3,I_{m_n}}) - \frac{\varphi}{kN_h} (A_{m_n} + k_{3,A_{m_n}}) (I_{m_n} + k_{3,I_{m_n}}) - \eta_m (A_{m_n} + k_{3,A_{m_n}}) - \mu_m (A_{m_n} + k_{3,A_{m_n}}) \right)$$

$$k_{4,S_m} = hf \left(t_0, S_{h_n} + k_{3,S_{h_n}}, E_{h_n} + k_{3,E_{h_n}}, I_{h_n} + k_{3,I_{h_n}}, A_{m_n} + k_{3,A_{m_n}}, S_{m_n} + k_{3,S_{m_n}}, I_{m_n} + k_{3,I_{m_n}} \right)$$

$$= h \left(\eta_m (A_{m_n} + k_{3,A_{m_n}}) - \frac{B\beta_m}{N_h} (I_{h_n} + k_{3,I_{h_n}}) (S_{m_n} + k_{3,S_{m_n}}) - \mu_m (S_{m_n} + k_{3,S_{m_n}}) \right)$$

$$\begin{aligned}
 k_{4,I_m} &= hf \left(t_0, S_{h_n} + k_{3,S_{h_n}}, E_{h_n} + k_{3,E_{h_n}}, I_{h_n} + k_{3,I_{h_n}}, A_{m_n} + \right. \\
 &\quad \left. k_{3,A_{m_n}}, S_{m_n} + k_{3,S_{m_n}}, I_{m_n} + k_{3,I_{m_n}} \right) \\
 &= h \left(\frac{B\beta_m}{N_h} (I_{h_n} + k_{3,I_{h_n}}) (S_{m_n} + k_{3,S_{m_n}}) - \mu_m (I_{m_n} + \right. \\
 &\quad \left. k_{3,I_{m_n}}) \right)
 \end{aligned}$$

Parameter yang digunakan dalam simulasi untuk keadaan bebas penyakit beserta nilai awal pada setiap populasi disajikan dalam tabel dibawah ini

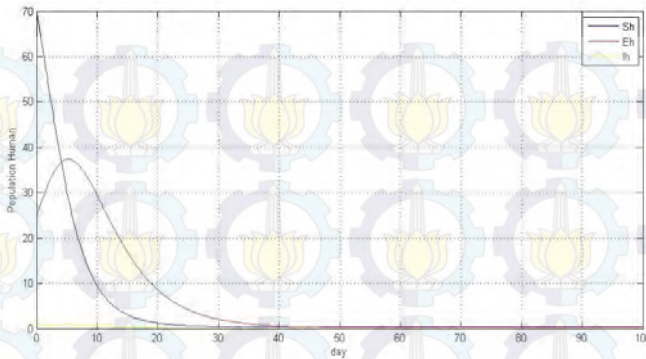
Tabel 4.3 Nilai Awal Parameter

NO	Parameter	Nilai Parameter
1	B	0.8
2	φ	0.1
3	γ_h	0.1667
4	μ_h	0.0000385
5	μ_m	0.1
6	β_m	0.375
7	η_m	0.08
8	p	0.09
9	κ	3
10	η_h	7
11	β_h	2.92356

Tabel 4.4 Nilai awal dari masing- masing
Sub populasi

No	Sub populasi ketika $t = 0$	Nilai awal (per jiwa)
1	S_h	70
2	E_h	25
3	I_h	5
4	A_m	300
5	S_m	600
6	I_m	0
7	N_h	100

Setelah dilakukan simulasi dengan memasukkan parameter pada setiap populasi dengan menggunakan metode numerik Runge-Kutta dengan $h = 0.01$. Nilai parameter dan nilai awal dari Tabel 4.1 terdapat nilai η_h yang diperoleh dari Dinas Kesehatan Kota Surabaya maka nilai $\beta_h = 2.92356$. Tabel 4.1 dan Tabel 4.2 menghasilkan $\mathcal{R}_0 = 1$, diharapkan menghasilkan titik kesetimbangan yang bersesuaian dengan pembahasan sebelumnya yaitu jika $\mathcal{R}_0 = 1$ maka titik kesetimbangan pada saat endemik. Sehingga didapatkan grafik kestabilan laju populasi manusia dan kestabilan laju populasi nyamuk seperti berikut ini :



Gambar 4.2 Grafik Kestabilan Populasi Manusia

Saat $\mathcal{R}_0 = 1, N_h = 100, h = 0.01$

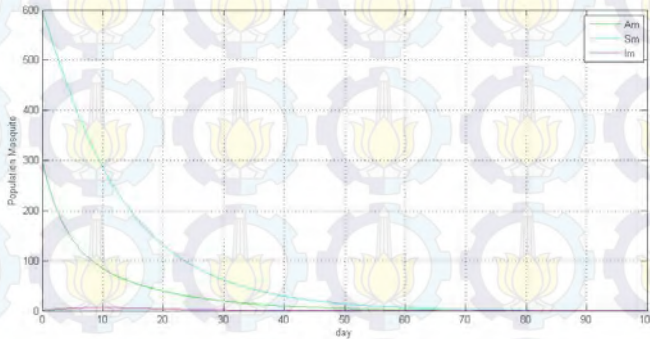
Gambar 4.2 menunjukkan bahwa untuk $0 \leq t \leq 100$ grafik populasi S_h, E_h , dan I_h menunjukkan arah ke titik setimbang. Untuk laju pertumbuhan masing – masing populasi dijelaskan sebagai berikut :

- Laju Populasi S_h
Laju pertumbuhan populasi S_h mengalami penurunan. Berkurangnya populasi ini dikarenakan laju kelahiran serta individu yang hilang kekebalannya lebih kecil dari laju infeksi yang menyebabkan individu yang rentan ini menjadi terinfeksi. Dari Gambar 4.2 terlihat populasi ini akan terus menurun hingga menuju suatu titik dan stabil di titik tersebut sampai $t \rightarrow \infty$.
- Laju Populasi E_h
Laju pertumbuhan populasi E_h awalnya naik kurang dari waktu 1 bulan. Hal ini dikarenakan berkurangnya populasi S_h yang menjadi individu terkena E_h , banyaknya individu dari bayi baru lahir yang terkena, dan individu yang bermigrasi sehingga populasi E_h bertambah. Setelah itu laju pertumbuhannya kembali mengalami penurunan karena laju perpindahan menuju infeksi lebih besar daripada laju

pertambahan populasi E_h . Dari Gambar 4.2 terlihat populasi ini akan terus berkurang hingga menuju suatu titik dan stabil di titik tersebut sampai $t \rightarrow \infty$

- Laju Populasi I_h

Laju pertumbuhan populasi I_h mengalami penurunan dalam kurun waktu kurang dari 1 hari. Hal ini dikarenakan populasi I_h mengalami laju kematian lebih besar daripada laju pertambahan populasinya. Dari Gambar 4.2 terlihat populasi ini akan terus berkurang hingga menuju suatu titik dan stabil di titik tersebut sampai $t \rightarrow \infty$



Gambar 4.3 Grafik Kestabilan Populasi Nyamuk

Saat $\mathcal{R}_0 = 1, N_h = 100, h = 0.01$

Gambar 4.3 menunjukkan bahwa untuk $0 \leq t \leq 100$ grafik populasi A_m, S_m , dan I_m menunjukkan arah ke titik setimbang, Untuk laju pertumbuhan masing – masing populasi dijelaskan sebagai berikut :

- Laju Populasi A_m

Laju pertumbuhan populasi A_m mengalami penurunan secara terus-menerus, pada Gambar 4.3 grafiknya menunjukkan penurunan secara drastis pada satu waktu. Setelah itu, laju

dari populasi A_m mulai menuju titik setimbang dan stabil pada titik tersebut. Laju pertumbuhan pada populasi A_m mengalami penurunan, disebabkan oleh laju perpindahan dan dari individu A_m menjadi individu S_m . Populasi ini akan terus turun hingga menuju suatu titik dan stabil di titik tersebut sampai $t \rightarrow \infty$

- Laju Populasi S_m
Laju pertumbuhan populasi S_m mengalami penurunan mulai dari bulan pertama. Hal ini dikarenakan laju perpindahan dari populasi S_m lebih besar dari laju pertumbuhannya. Dari Gambar 4.3 terlihat populasi ini akan terus berkurang hingga menuju suatu titik dan stabil di titik tersebut sampai $t \rightarrow \infty$
- Laju Populasi I_m
Laju pertumbuhan populasi I_m awalnya naik lalu menurun pada waktu kurang dari satu bulan. Hal ini dikarenakan laju kematian dari populasi I_m lebih besar dari laju pertumbuhannya. Dari Gambar 4.3 terlihat populasi ini akan terus berkurang hingga menuju suatu titik dan stabil di titik tersebut sampai $t \rightarrow \infty$

BAB V PENUTUP

Pada bab ini diberikan kesimpulan sebagai hasil dari analisa model yang telah diperoleh dan saran sebagai pertimbangan dalam pengembangan atau penelitian lebih lanjut.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan pada penulisan tugas akhir ini, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut

1. Dengan mempelajari fenomena yang ada dan diberikan beberapa definisi, diperoleh konstruksi model penyebaran demam berdarah sebagai berikut

$$\frac{dS_h}{dt} = \mu_h^* N_h - B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m - pS_h - \mu_h S_h$$

$$\frac{dE_h}{dt} = B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m + pS_h - \mu_h E_h - \gamma_h E_h$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \gamma_h E_h - (\eta_h + \mu_h) I_h$$

$$\frac{dA_m}{dt} = \varphi \left(1 - \frac{A_m}{kN_m} \right) (S_m + I_m) - (\eta_m + \mu_m) A_m$$

$$\frac{dS_m}{dt} = \eta_m A_m - (B\beta_m \frac{I_h}{N_h} + \mu_m) S_m$$

$$\frac{dI_m}{dt} = B\beta_m \frac{I_h}{N_h} S_m - \mu_m I_m$$

2. Model epidemiologi *SEIR* demam berdarah di Surabaya yang telah dianalisis mempunyai dua titik setimbang dan analisis kestabilan sebagai berikut :

- a. Titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_0 = (S_h^0, E_h^0, I_h^0, R_h^0, A_m^0, S_m^0, I_m^0)$$

$$E_0 = \left\{ \frac{\mu_h^* N_h}{(p+\mu_h)}, \frac{p\mu_h^* N_h}{(p+\mu_h)(\mu_h+\gamma_h)}, 0, \frac{kN_m \mathcal{M}}{\varphi \eta_m}, \frac{kN_m \mathcal{M}}{\mu_m \varphi}, 0 \right\}$$

b. Titik kesetimbangan endemik

$$E_0^* = (S_h^*, E_h^*, I_h^*, A_m^*, S_m^*, I_m^*)$$

dengan

$$S_h^* = \frac{\mu_h^* N_h^2}{B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h}$$

$$E_h^* = \left(\frac{B\beta_h I_m^* + pN_h}{(\mu_h + \gamma_h)} \right) \left(\frac{\mu_h^* N_h}{B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h} \right)$$

$$I_h^* = \frac{\gamma_h}{(\eta_h + \mu_h)} \left(\frac{B\beta_h I_m^* + pN_h}{(\mu_h + \gamma_h)} \right) \left(\frac{\mu_h^* N_h}{B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h} \right)$$

$$A_m^* = \frac{\mu_m I_m^* (\mu_h B\beta_m \gamma_h (B\beta_h I_m^* + pN_h) + \mu_m (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h))}{\eta_m \mu_h^* \gamma_h B\beta_m (B\beta_h I_m^* + pN_h)}$$

$$S_m^* = \frac{\mu_m I_m^* (\eta_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h) (B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h)}{\mu_h^* \gamma_h B\beta_m (B\beta_h I_m^* + pN_h)}$$

Jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit ada dan bersifat stabil asimtotik, artinya setiap individu yang terinfeksi memproduksi kurang dari satu individu terinfeksi baru, dengan kata lain dapat diprediksi bahwa infeksi akan bersih dari populasi. Sedangkan jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka kedua titik kesetimbangan ada, akan tetapi titik ketimbangan endemik bersifat stabil asimtotik dan titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil, artinya setiap individu yang terinfeksi memproduksi lebih dari satu individu terinfeksi baru, dengan kata lain dapat diprediksi bahwa infeksi akan menyebar pada populasi.

dengan bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) yaitu :

$$\mathcal{R}_0 = \sqrt{\frac{\gamma_h B^2 \beta_m \beta_h}{\mu_m (\gamma_h + \mu_h) (\eta_h + \mu_h)}}$$

dan *rate transmission*

$$\beta_h \geq \beta_{h_{min}} = \left(1 + \frac{\mu_h}{\gamma_h}\right) \frac{(\eta_h + \mu_h) \mu_m}{B^2 \beta_m}$$

dengan nilai

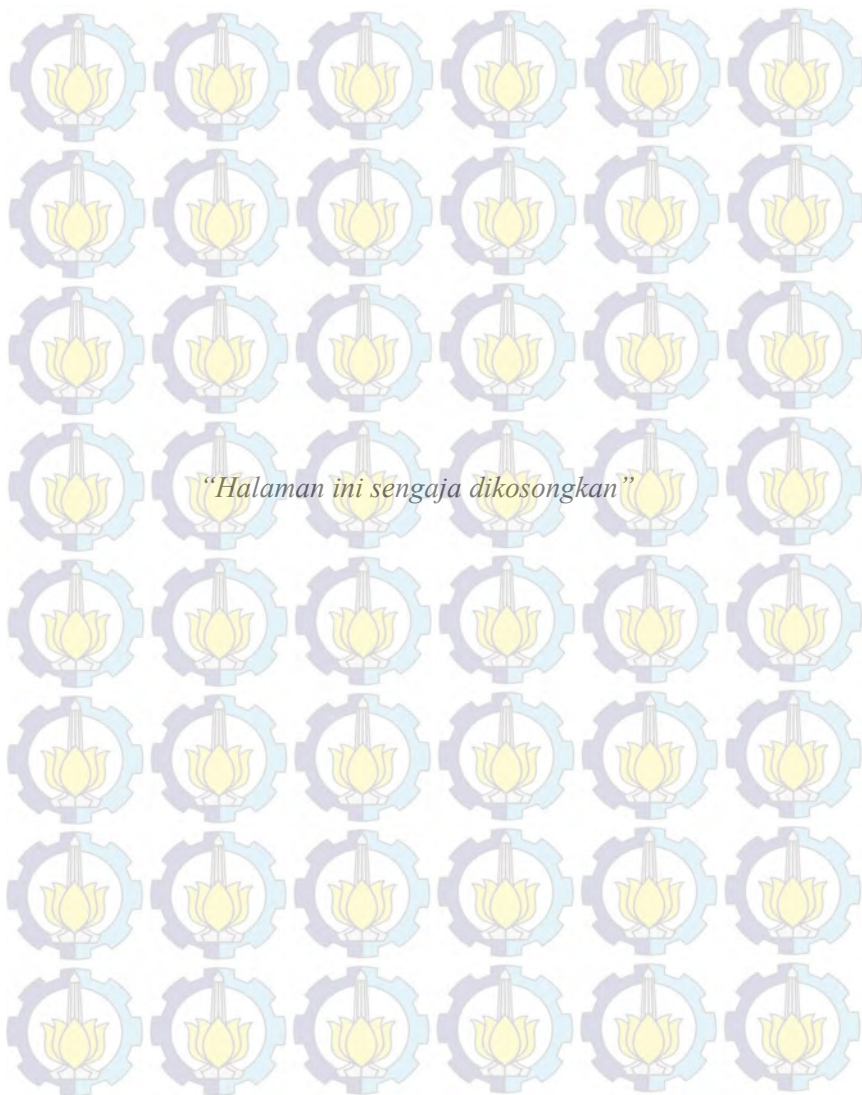
$\eta_h = \text{jumlah penderita} - \text{jumlah yang meninggal}$, yang diperoleh dari data Dinas Kesehatan Kota Surabaya

3. Perubahan jenis kurva bifurkasi dipengaruhi oleh perubahan nilai \mathcal{R}_0 yang mempengaruhi nilai A, B, C, dan D sehingga nilai titik puncaknya pun berubah. Bifurkasi maju terjadi pada saat titik puncak dari sistem persamaan $f(I_m)$ yaitu pada saat I_m bernilai real positif.

4. Simulasi model epidemiologi *SEIR* demam berdarah dengan menggunakan metode numerik Runge-Kutta menghasilkan grafik dari kesetimbangan jika nilai $h = 0.01$. Serta pengaruh dari input nilai awal pada populasi, jika nilai awal pada populasi lebih sedikit maka waktu untuk menuju titik setimbang semakin cepat.

5.2 Saran

Pada penelitian ini tidak dibahas mengenai analisis kestabilan global dari model epidemiologi *SEIR* dan terdapat bifurkasi Hopf karena adanya nilai akar-akar I_m yang imajiner. Oleh karena itu, penulis menyarankan kepada pembaca yang tertarik masalah ini agar pada penelitian selanjutnya menyertakan analisis global dan bifurkasi Hopf dari model epidemiologi *SEIR* serta dapat diteliti lebih lanjut mengenai upaya pencegahannya.



LAMPIRAN A

Listing Program Kestabilan Titik Kesetimbangan

```
• M File dengan judul mainfile.m
miuh=0.000385;
Nh=30;
B=0.8;
bth=0.375;
p=0.09;
gmh=0.25;
pi=0.0369128;
K=3;
etam=0.08;
btm=0.375;
etah=22;
mium=0.02941;
Ro=sqrt((B^2*bth*btm*gmh)/mium*(miuh+gmh)*(miuh+
etah))

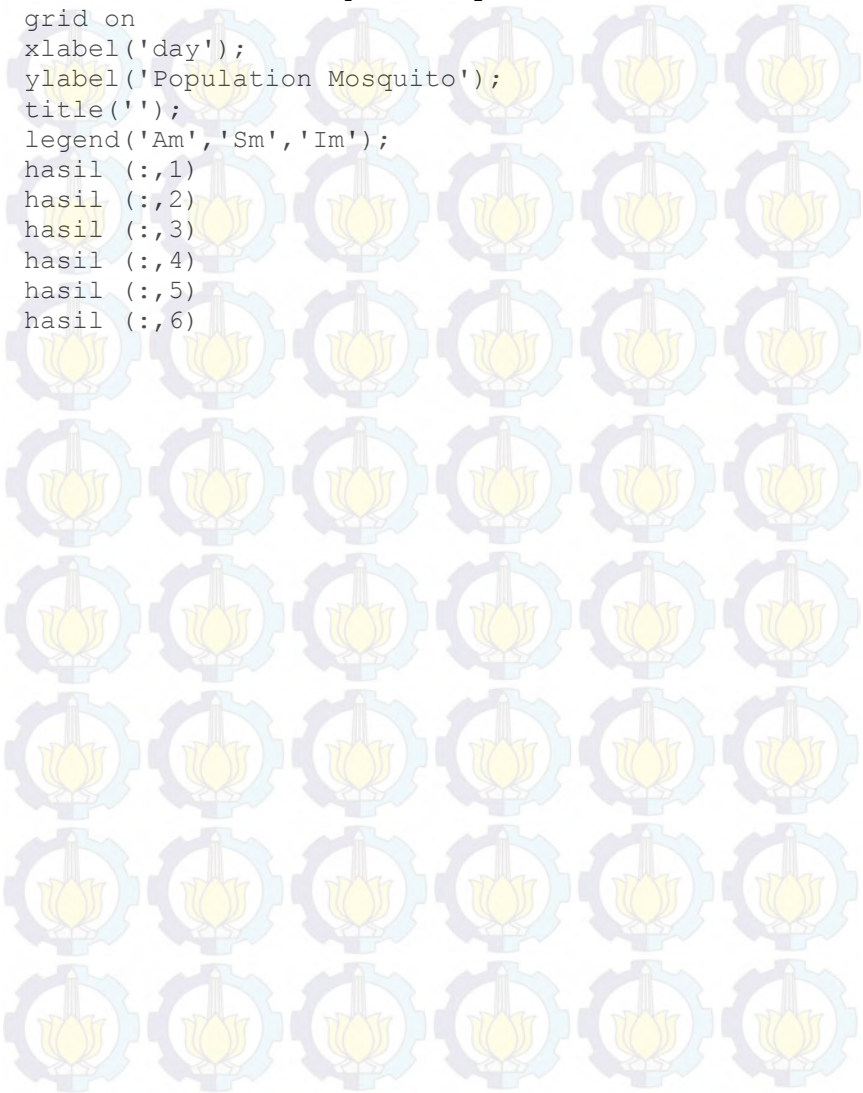
x=[70 25 5 300 600 0];
t=[0 100];
[time hasil]=ode45(@DesiODE,t,x);

figure (1)
plot(time,hasil(:,1),time,hasil(:,2),'r',time,ha
sil(:,3),'y');
title('Kestabilan Populasi Manusia');
grid on
xlabel('day');
ylabel('Population Human');
title('');
legend('Sh','Eh','Ih');

figure (2)
plot(time,hasil(:,4),'g',time,hasil(:,5),'c',...
time,hasil(:,6),'m');
```


LANJUTAN LAMPIRAN A

```
title('Kestabilan Populasi Nyamuk');  
grid on  
xlabel('day');  
ylabel('Population Mosquito');  
title('');  
legend('Am', 'Sm', 'Im');  
hasil(:,1)  
hasil(:,2)  
hasil(:,3)  
hasil(:,4)  
hasil(:,5)  
hasil(:,6)
```



LAMPIRAN B

Listing Program Bifurkasi

- M File dengan judul bifurkasi.m

```

clc;
clear all
% global ak

Nh=480000;
B=0.8;
miuh=0.000385;
jPN=input('Masukkan Jumlah Penderita = ');
jM=input('Masukkan Jumlah Meninggal = ');
eth=jPN-jM;
p=0.09;
gmh=0.1667000;
phi=0.0369128;
k=3;
etm=0.08;
mium=0.1;
btm=0.375;
bth=(1+(miuh/gmh))*((miuh+eth)*mium)/(B*B*btm);

A=-
phi*mium*mium*B*B*B*bth*bth*btm*miuh*gmh*(eth+miuh)*...
(miuh+gmh)-
phi*mium*miuh*miuh*Nh*B*B*B*B*bth*bth*btm*btm*gmh*gmh;
A

B1=-
phi*mium*mium*B*B*bth*btm*miuh*gmh*(eth+miuh)*...
.
(miuh+gmh)*(p*Nh+miuh*Nh)-
2*phi*mium*miuh*miuh*Nh*Nh*p*B*B*B*bth*...

```

LANJUTAN LAMPIRAN B

$btm*btm*gmh*gmh+phi*k*Nh*etm*miuh*miuh*B*B*B*bth$
 $*btm*btm*gmh*...$

$(eth+miuh)*(gmh+miuh)+phi*k*Nh*Nh*etm*miuh*miuh*$
 $(B^4)*...$

$(bth^2)*(btm^2)*(gmh^2)-$
 $phi*(miuh^2)*miuh*(B^2)*bth*btm*gmh*p*...$

$Nh*(eth+miuh)*(gmh+miuh)*miuh*(miuh^2)*k*Nh*(B^4)$
 $*bth*(btm^2)*...$

$(gmh^2)*(etm+miuh)-$
 $(miuh^2)*miuh*(B^3)*(bth^2)*btm*gmh*k*Nh*...$
 $(eth+miuh)*(gmh+miuh)*(etm+miuh);$

B1

$C=phi*k*Nh*miuh*miuh*(B^2)*bth*btm*gmh*(eth+miuh)$
 $)*(miuh+gmh)*...$

$(p*Nh+miuh*Nh)+2*phi*p*k*(Nh^3)*etm*(miuh^2)*(B^3)$
 $*bth*(btm^2)*...$

$(gmh^2)-$
 $phi*(miuh^2)*miuh*B*btm*gmh*p*Nh*(eth+miuh)*(gmh+miuh)-...$

$phi*miuh*(miuh^2)*(Nh^3)*(p^2)*(B^2)*(btm^2)*(gmh^2)+phi*k*(Nh^2)*...$

$etm*miuh*miuh*(B^2)*(btm^2)*gmh*(eth+miuh)*(gmh+miuh)+phi*...$

$(miuh^2)*B*bth*((eth+miuh)^2)*((gmh+miuh)^2)*(p*Nh+miuh*Nh)+phi*...$

$Nh*miuh*miuh*(B^2)*bth*btm*gmh*(eth+miuh)*(gmh+miuh)*(p*Nh+miuh*Nh)-...$

$2*miuh*(miuh^2)*(Nh^2)*k*p*(B^3)*(btm^2)*bth*(gmh^2)*(etm+miuh)-...$

LANJUTAN LAMPIRAN B

```
(mium^2)*miuh*Nh*k*p*(B^2)*bth*btm*(eth+miuh)*(gmh+miuh)*(etm+mium)-...
```

```
(mium^2)*miuh*Nh*k*(B^2)*bth*btm*(eth+miuh)*(gmh+miuh)*(etm+mium)*...
(p*Nh+miuh*Nh);
```

```
C
```

```
%
```

```
D=phi*k*(Nh^2)*p*etm*mium*miuh*B*btm*gmh*(eth+miuh)*(gmh+miuh)*...
```

```
%(p*Nh+miuh*Nh)+phi*k*(Nh^4)*(p*p)*etm*(miuh^2)*(B^2)*(btm^2)*(gmh^2)+...
```

```
%phi*(mium^2)*((eth+miuh)^2)*((gmh+miuh)^2)*((p*Nh+miuh*Nh)^2)+...
```

```
%phi*mium*miuh*(Nh^2)*p*B*btm*gmh*(eth+miuh)*(gmh+miuh)*(p*Nh+miuh*Nh)-...
```

```
%(mium^2)*(miuh^2)*Nh*k*(B^2)*(btm^2)*(gmh^2)*(eth+miuh)*(gmh+miuh)*...
```

```
%(etm+mium)*(p^3)*(Nh^3)-
```

```
k*(p^2)*(mium^2)*(miuh^3)*(Nh^4)*B*B*...
```

```
%(btm^2)*(gmh^2)*(eth+miuh)*(gmh+miuh)*(etm+mium);
```

```
%D
```

```
r_0=sqrt(((B^2)*bth*btm*gmh)/(eth+miuh)*(gmh+miuh)*mium);
```

```
r_0
```

```
R_0=r_0:(1-r_0)/100:1;
```

```
for i=1:1:101
```

```
D=(phi*k*(Nh^2)*p*etm*mium*miuh*B*btm*gmh*(eth+miuh)*(gmh+miuh)*...
```

```
(p*Nh+miuh*Nh)+phi*k*(Nh^4)*(p*p)*etm*(miuh^2)*(B^2)*(btm^2)*...
```


LANJUTAN LAMPIRAN B

```
(gmh^2)+phi*(mium^2)*((eth+miuh)^2)*((gmh+miuh)^2)*...
```

```
((p*Nh+miuh*Nh)^2)+phi*mium*miuh*(Nh^2)*p*B*btm*gmh*(eth+miuh)*...
```

```
(gmh+miuh)*(p*Nh+miuh*Nh)-(mium^2)*(miuh^2)*Nh*k*(B^2)*(btm^2)*...
```

```
(gmh^2)*(eth+miuh)*(gmh+miuh)*(etm+mium)*(p^3)*(Nh^3)-k*(p^2)*...
```

```
(mium^2)*(miuh^3)*(Nh^4)*B*B*(btm^2)*(gmh^2)*(eth+miuh)*...
```

```
(gmh+miuh)*(etm+mium))*(1-R_0(i));
```

```
AA(i)=D;
```

```
ak=jpn(jPN,jM,D);
```

```
ak1(i)=ak(1);
```

```
ak2(i)=ak(2);
```

```
end
```

```
% plot(R_0,ak1,'r',R_0,ak2,'b','LineWidth',2);
```

```
R_a=1:(3-1)/100:3;
```

```
for i=1:1:101
```

```
D=(phi*k*(Nh^2)*p*etm*mium*miuh*B*btm*gmh*(eth+miuh)*(gmh+miuh)*...
```

```
(p*Nh+miuh*Nh)+phi*k*(Nh^4)*(p*p)*etm*(miuh^2)*(B^2)*(btm^2)*(gmh^2)+...
```

```
phi*(mium^2)*((eth+miuh)^2)*((gmh+miuh)^2)*((p*Nh+miuh*Nh)^2)+...
```

```
phi*mium*miuh*(Nh^2)*p*B*btm*gmh*(eth+miuh)*(gmh+miuh)*(p*Nh+miuh*Nh)-...
```

LANJUTAN LAMPIRAN B

```
(mium^2)*(miuh^2)*Nh*k*(B^2)*(btm^2)*(gmh^2)*(eth+miuh)*(gmh+miuh)*...
(etm+mium)*(p^3)*(Nh^3)-
k*(p^2)*(mium^2)*(miuh^3)*(Nh^4)*B*B*...
```

```
(btm^2)*(gmh^2)*(eth+miuh)*(gmh+miuh)*(etm+mium)
)*(1-R_a(i));
```

```
BB(i)=D;
```

```
ak=jpn(jPN,jM,D);
```

```
ak3(i)=ak(2);
```

```
end
```

```
ak4=ak3-1077729;
```

```
%hold on
```

```
% figure(1)
```

```
%plot(R_a,ak3,'b', 'LineWidth',2);
```

```
% figure(2)
```

```
plot(R_a-0.02,ak4,'g', 'LineWidth',2);
```

```
grid on
```

```
% hold off
```

```
xlabel('Bilangan Reproduksi Dasar (R0)')
```

```
ylabel('Populasi (Im)')
```

```
legend('Im1','Im2',20,'location','eastoutside');
```

```
axis([r_0,R_a(101)-1,0,ak3(101)]);
```

• M File dengan judul jpn.m

```
function ak=jpn(jPN,jM,D)
```

```
Nh=480000;
```

```
B=0.8;
```

```
miuh=0.000385;
```

```
eth=jPN-jM;
```

```
p=0.09;
```

```
gmh=0.1667000;
```

```
phi=0.0369128;
```

LANJUTAN LAMPIRAN B

```

k=3;
etm=0.08;
mium=0.1;
btm=0.375;
bth=(1+(miuh/gmh))*((miuh+eth)*mium)/(B*B*btm);
A=-
phi*mium*mium*B*B*B*bth*bth*btm*miuh*gmh*(eth+miuh)*...
(miuh+gmh)-
phi*mium*miuh*miuh*Nh*B*B*B*B*bth*bth*btm*btm*gmh*gmh
Bl=-
phi*mium*mium*B*B*bth*btm*miuh*gmh*(eth+miuh)*...
.
(miuh+gmh)*(p*Nh+miuh*Nh)-
2*phi*mium*miuh*miuh*Nh*Nh*p*B*B*B*bth*...
btm*btm*gmh*gmh+phi*k*Nh*etm*mium*miuh*B*B*B*bth*
*btm*btm*gmh*...
(eth+miuh)*(gmh+miuh)+phi*k*Nh*Nh*etm*miuh*miuh*
(B^4)*(bth^2)*(btm^2)*...
(gmh^2)-
phi*(mium^2)*miuh*(B^2)*bth*btm*gmh*p*Nh*(eth+miuh)*
(gmh+miuh)*...
mium*(miuh^2)*k*Nh*(B^4)*bth*(btm^2)*(gmh^2)*(etm+mium)-
(mium^2)*miuh*...
(B^3)*(bth^2)*btm*gmh*k*Nh*(eth+miuh)*(gmh+miuh)*
*(etm+mium)

C=phi*k*Nh*mium*miuh*(B^2)*bth*btm*gmh*(eth+miuh)*
(miuh+gmh)*(p*Nh+miuh*Nh)...
+2*phi*p*k*(Nh^3)*etm*(miuh^2)*(B^3)*bth*(btm^2)*
(gmh^2)-...
phi*(mium^2)*miuh*B*btm*gmh*p*Nh*(eth+miuh)*(gmh+miuh)-
phi*mium*(miuh^2)*...
(Nh^3)*(p^2)*(B^2)*(btm^2)*(gmh^2)+phi*k*(Nh^2)*
etm*mium*miuh*(B^2)*...

```

LANJUTAN LAMPIRAN B

```

(btm^2)*gmh*(eth+miuh)*(gmh+miuh)+phi*(mium^2)*B
*bth*((eth+miuh)^2)*...
((gmh+miuh)^2)*(p*Nh+miuh*Nh)+phi*Nh*miuh*miuh*(
B^2)*bth*btm*gmh*...
(eth+miuh)*(gmh+miuh)*(p*Nh+miuh*Nh)-
2*miuh*(miuh^2)*(Nh^2)*k*p*(B^3)*(btm^2)*...
bth*(gmh^2)*(etm+mium)-
(mium^2)*miuh*Nh*k*p*(B^2)*bth*btm*(eth+miuh)*(g
mh+miuh)*...
(etm+mium)-
(mium^2)*miuh*Nh*k*(B^2)*bth*btm*(eth+miuh)*(gmh
+miuh)*...
(etm+mium)*(p*Nh+miuh*Nh)

%
D=phi*k*(Nh^2)*p*etm*miuh*miuh*B*btm*gmh*(eth+mi
uh)*(gmh+miuh)*...
%
(p*Nh+miuh*Nh)+phi*k*(Nh^4)*(p*p)*etm*(miuh^2)*(
B^2)*(btm^2)*(gmh^2)+...
%
phi*(mium^2)*((eth+miuh)^2)*((gmh+miuh)^2)*((p*N
h+miuh*Nh)^2)+...
%
phi*miuh*miuh*(Nh^2)*p*B*btm*gmh*(eth+miuh)*(gmh
+miuh)*(p*Nh+miuh*Nh)-...
%
(mium^2)*(miuh^2)*Nh*k*(B^2)*(btm^2)*(gmh^2)*(et
h+miuh)*(gmh+miuh)*...
%
(etm+mium)*(p^3)*(Nh^3)-
k*(p^2)*(mium^2)*(miuh^3)*(Nh^4)*B*B*...
%
(btm^2)*(gmh^2)*(eth+miuh)*(gmh+miuh)*(etm+mium)

syms Im
solve(A*(Im^4)+B1*(Im^3)+C*(Im^2)+D*Im);
ak=double(ans);

```




LAMPIRAN C

Data Jumlah Penderita dan Kematian DBD Di Surabaya

Tabel A1. Data jumlah penderita dan kematian DBD Tahun 2011

KECAMA TAN	NAMA PUSKESMAS	Demam Berdarah Dengue			
		Jumlah Kasus	Jumlah Mening gal	Jumlah sembuh (η_h)	<i>Rate transmission</i> (β_h)
Sukomanun ggal	Tanjungsari	7	0	7	2.92356
	Simomulyo	12	0	12	5.01171
Tandes	Manukan Kulon	53	0	53	22.1345
	Balongsari	18	1	17	7.09985
Asemrowo	Asemrowo	14	0	14	5.84697
Benowo	Sememi	40	0	40	16.7053
Pakal	Benowo	22	0	22	9.188
Lakarsantri	Jeruk	9	0	9	3.75882
	Lidah Kulon	12	0	12	5.01171
	Bangkingan	1	0	1	0.41779
Sambikerep	Lontar	23	1	22	9.188
	Made	7	0	7	2.92356
Genteng	Peneleh	15	0	15	6.2646
	Ketabang	1	0	1	0.41779
Tegalsari	Kedungdoro	10	0	10	4.17645
	Dr. Soetomo	15	0	15	6.2646
Bubutan	Tembok Dukuh	27	0	27	11.2761
	Gundih	17	0	17	7.09985
Simokerto	Tambakrejo	26	1	25	10.4409
	Simolawang	5	0	5	2.08831
Pabean Cantikan	Perak Timur	31	0	31	12.9467
Semampir	Pegirian	9	1	8	3.34119
	Sidotopo	15	0	15	6.2646
	Wonokusumo	13	0	13	5.42934
Krembanga n	Krembangan Sel	23	0	23	9.60563
	Dupak	25	0	25	10.4409
Bulak	Kenjeran	9	0	9	3.75882

LANJUTAN LAMPIRAN C

KECAMATAN	NAMA PUSKESMAS	Demam Berdarah Dengue			
		Jumlah Kasus	Jumlah Meninggal	Jumlah sembuh (η_h)	Rate transmission (β_h)
Kenjeran	Tanah Kali Kedinding	21	0	21	8.77037
	Sidotopo Wetan	40	0	40	16.7053
Tambaksari	Rangkah	15	0	15	6.2646
	Pacar Keling	24	0	24	10.0233
	Gading	32	0	32	13.3643
Gubeng	Pucangsewu	15	0	15	6.2646
	Mojo	14	0	14	5.84697
Rungkut	Kalirungkut	6	0	6	2.50593
	Medokan Ayu	11	0	11	4.59408
Tenggilis	Tenggilis	34	0	34	14.1995
Gunung Anyar	Gunung Anyar	17	0	17	7.09985
Sukolilo	Menur	16	0	16	6.68222
	Klampis Ngasem	7	0	7	2.92356
	Keputih	6	0	6	2.50593
Mulyorejo	Mulyorejo	24	0	24	10.0233
Sawahan	Sawahan	21	0	21	8.77037
	Putat Jaya	41	0	41	17.1229
	Banyu Urip	26	0	26	10.8585
	Pakis	12	0	12	5.01171
Wonokromo	Jagir	13	1	12	5.01171
	Wonokromo	12	0	12	5.01171
	Ngagelrejo	8	0	8	3.34119
Karang Pilang	Kedurus	21	0	21	8.77037
Dukuh Pakis	Dukuh Kupang	17	1	16	6.68222
Wiyung	Wiyung	19	0	19	7.93511
	Balas Klumprik	7	0	7	2.92356
Gayungan	Gayungan	21	1	20	8.35274

LANJUTAN LAMPIRAN C

KECAMA TAN	NAMA PUSKESMAS	Demam Berdarah Dengue			
		Jumlah Kasus	Jumlah Mening gal	Jumlah sembuh (η_h)	<i>Rate transmission (β_h)</i>
Wonocolo	Jemursari	13	0	13	5.42934
	Sidosermo	12	0	12	5.01171
	Siwalankerto	8	0	8	3.34119
Jambangan	Kebonsari	16	0	16	6.68222

Tabel A2. Data jumlah penderita dan kematian DBD Tahun 2012

KECAMA TAN	NAMA PUSKESMAS	Demam Berdarah Dengue			
		Jumlah Kasus	Jumlah Mening gal	Jumlah sembuh (η_h)	<i>Rate transmission (β_h)</i>
Sukomanun ggal	Tanjungsari	20	0	20	8.35274
	Simomulyo	33	0	33	13.7819
Tandes	Manukan Kulon	39	0	39	16.2877
	Balongsari	32	1	31	12.9467
Asemrowo	Asemrowo	16	0	16	6.68222
Benowo	Sememi	39	0	39	16.2877
Pakal	Benowo	23	0	23	9.60563
Lakarsantri	Jeruk	24	0	24	10.0233
	Lidah Kulon	16	0	16	6.68222
	Bangkingan	8	0	8	3.34119
Sambikerep	Lontar	16	0	16	6.68222
	Made	13	0	13	5.42934
Genteng	Peneleh	8	0	8	3.34119
	Ketabang	3	0	3	1.25305
Tegalsari	Kedungdoro	10	1	9	3.75882
	Dr. Soetomo	14	0	14	5.84697
Bubutan	Tembok Dukuh	22	0	22	9.188
	Gundih	16	0	16	6.68222
Simokerto	Tambakrejo	31	1	30	12.529
	Simolawang	14	0	14	5.84697
Pabean Cantikan	Perak Timur	28	0	28	11.6938
Semampir	Pegirian	28	0	28	11.6938
	Sidotopo	25	0	25	10.4409

LANJUTAN LAMPIRAN C

KECAMATAN	NAMA PUSKESMAS	Demam Berdarah Dengue			
		Jumlah Kasus	Jumlah Meninggal	Jumlah sembuh (η_h)	Rate transmission (β_h)
	Wonokusumo	20	0	20	8.35274
Krembangan	Krembangan Sel	32	0	32	13.3643
	Dupak	3	0	3	1.25305
Bulak	Kenjeran	7	0	7	2.92356
Simokerto	Tambakrejo	7	0	7	2.92356
	Simolawang	15	0	15	6.2646
Kenjeran	Tanah Kali Kedinding	11	0	11	4.59408
	Sidotopo Wetan	12	0	12	5.01171
Tambaksari	Rangkah	5	0	5	2.08831
	Pacar Keling	14	0	14	5.84697
	Gading	22	0	22	9.188
Gubeng	Pucangsewu	18	0	18	7.51748
	Mojo	17	1	16	6.68222
Rungkut	Kalirungkut	10	0	10	4.17645
	Medokan Ayu	9	0	9	3.75882
Tenggilis	Tenggilis	21	0	21	8.77037
Gunung Anyar	Gunung Anyar	23	1	22	9.188
Sukolilo	Menur	22	0	22	9.188
	Klampis Ngasem	0	0	0	0.000160787
	Keputih	7	0	7	2.92356
Mulyorejo	Mulyorejo	7	0	7	2.92356
	Kalijudan	8	0	8	3.34119
Sawahan	Sawahan	21	0	21	8.77037
	Putat Jaya	34	0	34	14.1995
	Banyu Urip	29	0	29	12.1114
	Pakis	8	1	7	2.92356
Wonokromo	Jagir	13	0	13	5.42934
	Wonokromo	14	0	14	5.84697
	Ngagelrejo	21	0	21	8.77037
Karang Pilang	Kedurus	42	0	42	17.5406

LANJUTAN LAMPIRAN C

KECAMATAN	NAMA PUSKESMAS	Demam Berdarah Dengue			
		Jumlah Kasus	Jumlah Meninggal	Jumlah sembuh (η_h)	Rate transmission (β_h)
Dukuh Pakis	Dukuh Kupang	25	0	25	10.4409
Wiyung	Wiyung	34	0	34	14.1995
	Balas Klumprik	8	0	8	3.34119
Gayungan	Gayungan	19	0	19	7.93511
Wonocolo	Jemursari	10	0	10	4.17645
	Sidosermo	11	0	11	4.59408
	Siwalankerto	9	0	9	3.75882
Jambangan	Kebonsari	15	0	15	6.2646

Tabel A3. Data jumlah penderita dan kematian DBD Tahun 2013

KECAMATAN	NAMA PUSKESMAS	Demam Berdarah Dengue			
		Jumlah Kasus	Jumlah Meninggal	Jumlah sembuh (η_h)	Rate transmission (β_h)
Sukomanunggal	Tanjungsari	20	0	20	8.35274
	Simomulyo	48	2	46	19.2111
Tandes	Manukan Kulon	84	0	84	35.081
	Balongsari	46	1	45	18.7935
Asemrowo	Asemrowo	22	0	22	9.188
Benowo	Sememi	75	1	74	30.9047
Pakal	Benowo	35	0	35	14.6172
Lakarsantri	Jeruk	3	0	3	1.25305
	Lidah Kulon	16	0	16	6.68222
	Bangkingan	6	0	6	2.50593
Sambikerep	Lontar	70	1	69	28.8166
	Made	5	0	5	2.08831
Genteng	Peneleh	30	0	30	12.529
	Ketabang	13	0	13	5.42934
Tegalsari	Kedungdoro	35	1	34	14.1995
	Dr. Soetomo	43	0	43	17.9582
Bubutan	Tembok Dukuh	52	3	49	20.464
	Gundih	5	0	5	2.08831
Simokerto	Tambakrejo	57	0	57	23.805
	Simolawang	24	0	24	10.0233

LANJUTAN LAMPIRAN C

KECAMATAN	NAMA PUSKESMAS	Demam Berdarah Dengue			
		Jumlah Kasus	Jumlah Meninggal	Jumlah sembuh (η_h)	Rate transmission (β_h)
Pabean Cantikan	Perak Timur	44	0	44	18.3758
Semampir	Pegirian	21	0	21	8.77037
	Sidotopo	28	0	28	11.6938
	Wonokusumo	25	0	25	10.4409
Krembangan	Krembangan Sel	56	0	56	23.3874
	Dupak	8	0	8	3.34119
	Morokrembangan	8	0	8	3.34119
Bulak	Kenjeran	19	0	19	7.93511
Kenjeran	Tanah Kali Ken	22	0	22	9.188
	Sidotopo Wetan	23	0	23	9.60563
	Bulak Banteng	7	0	7	2.92356
Tambaksari	Tambak Wedi	12	1	11	4.59408
	Rangkah	26	0	26	10.8585
	Pacar Keling	47	0	47	19.6287
Gubeng	Gading	34	0	34	14.1995
	Pucangsewu	31	0	31	12.9467
	Mojo	54	0	54	22.5521
Rungkut	Kalirungkut	28	0	28	11.6938
	Medokan Ayu	74	0	74	30.9047
Tenggiling	Tenggiling	91	0	91	38.0044
Gunung Anyar	Gunung Anyar	46	0	46	19.2111
Sukolilo	Menur	33	0	33	13.7819
	Klampis Ngasem	29	0	29	12.1114
	Keputih	35	0	35	14.6172
Mulyorejo	Mulyorejo	33	0	33	13.7819
	Kalijudan	32	2	30	12.529
Sawahan	Sawahan	51	1	50	20.8816
	Putat Jaya	57	0	57	23.805
	Banyu Urip	48	0	48	20.0464
	Pakis	32	1	31	12.9467

LANJUTAN LAMPIRAN C

KECAMA TAN	NAMA PUSKESMAS	Demam Berdarah Dengue			
		Jumlah Kasus	Jumlah Mening gal	Jumlah sembuh (η_h)	<i>Rate transmission</i> (β_h)
Wonokromo	Jagir	34	1	33	13.7819
	Wonokromo	27	0	27	11.2761
	Ngagelrejo	53	0	53	22.1345
Karang Pilang	Kedurus	50	0	50	20.8816
Dukuh Pakis	Dukuh Kupang	66	3	63	26.3108
Wiyung	Wiyung	42	0	42	17.5406
	Balas Klumprik	20	0	20	8.35274
Gayungan	Gayungan	61	1	60	25.0579
Wonocolo	Jemursari	28	0	28	11.6938
	Sidosermo	21	0	21	8.77037
	Siwalankerto	16	0	16	6.68222
Jambangan	Kebonsari	46	0	46	19.2111

Tabel A4. Data jumlah penderita dan kematian DBD Tahun 2014

KECAMA TAN	NAMA PUSKESMAS	Demam Berdarah Dengue			
		Jumlah Kasus	Jumlah Mening gal	Jumlah sembuh (η_h)	<i>Rate transmission</i> (β_h)
Sukomanunggal	Tanjungsari	9	0	9	3.75882
	Simomulyo	22	0	22	9.188
Tandes	Manukan Kulon	20	1	19	7.93511
	Balongsari	11	0	11	4.59408
Asemrowo	Asemrowo	5	0	5	2.08831
Benowo	Sememi	31	0	31	12.9467
Pakal	Benowo	6	0	6	2.50593
Lakarsantri	Jeruk	6	0	6	2.50593
	Lidah Kulon	12	0	12	5.01171
	Bangkingan	7	0	7	2.92356
Sambikerep	Lontar	16	0	16	6.68222
	Made	7	0	7	2.92356

LANJUTAN LAMPIRAN C

KECAMATAN	NAMA PUSKESMAS	Demam Berdarah Dengue			
		Jumlah Kasus	Jumlah Meninggal	Jumlah sembuh (η_h)	Rate transmission (β_h)
Genteng	Peneleh	16	0	16	6.68222
	Ketabang	3	0	3	1.25305
Tegalsari	Kedungdoro	7	1	6	2.50593
	Dr. Soetomo	6	0	6	2.50593
Bubutan	Tembok Dukuh	26	0	26	10.8585
	Gundih	8	0	8	3.34119
Simokerto	Tambakrejo	21	0	21	8.77037
	Simolawang	2	0	2	0.835419
Pabean Cantikan	Perak Timur	16	0	16	6.68222
	Pegirian	14	2	12	5.01171
Semampir	Sidotopo	14	0	14	5.84697
	Wonokusumo	8	0	8	3.34119
Krembangan	Krembangan Sel	20	0	20	8.35274
	Dupak	6	0	6	2.50593
Bulak	Morokrembangan	8	0	8	3.34119
	Kenjeran	8	1	7	2.92356
Kenjeran	Tanah Kali Kedinding	9	0	9	3.75882
	Sidotopo Wetan	16	0	16	6.68222
Tambaksari	Bulak Banteng	5	1	4	1.67068
	Tambak Wedi	12	0	12	5.01171
Gubeng	Rangkah	7	0	7	2.92356
	Pacar Keling	10	0	9	3.75882
Rungkut	Gading	16	1	15	6.2646
	Pucangsewu	15	0	15	6.2646
Tenggilis	Mojo	12	0	12	5.01171
	Kalirungkut	18	0	18	7.51748
Gunung Anyar	Medokan Ayu	23	0	23	9.60563
	Tenggilis	16	0	16	6.68222
Sukolilo	Gunung Anyar	20	1	19	7.93511
	Menur	13	1	12	5.01171

LANJUTAN LAMPIRAN C

KECAMA TAN	NAMA PUSKESMAS	Demam Berdarah Dengue			
		Jumlah Kasus	Jumlah Mening gal	Jumlah sembuh (η_h)	<i>Rate transmission</i> (β_h)
	Klampis Ngasem	7	0	7	2.92356
	Keputih	11	0	11	4.59408
Mulyorejo	Mulyorejo	7	0	7	2.92356
	Kalijudan	12	0	12	5.01171
Sawahan	Sawahan	16	0	16	6.68222
	Putat Jaya	35	1	34	14.1995
	Banyu Urip	19	0	19	7.93511
	Pakis	6	1	5	2.08831
Wonokromo	Jagir	9	1	8	3.34119
	Wonokromo	5	0	5	2.08831
	Ngagelrejo	23	1	22	9.188
Karang Pilang	Kedurus	25	1	24	10.0233
Dukuh Pakis	Dukuh Kupang	25	0	25	10.4409
Wiyung	Wiyung	25	0	25	10.4409
	Balas Klumprik	4	0	4	1.67068
Gayungan	Gayungan	21	3	18	7.51748
Wonocolo	Jemursari	5	0	5	2.08831
	Sidosermo	8	0	8	3.34119
	Siwalankerto	6	0	6	2.50593
Jambangan	Kebonsari	20	0	20	8.35274



DAFTAR PUSTAKA

- [1] Radhianti, R. 2012. *"Simulasi dan Analisa Kestabilan Model Matematika Mengenai Proses Transmisi Virus Dengue di dalam Tubuh Manusia"*. Bandung : Skripsi Jurusan Matematika UIN Gunung Djati.
- [2] Rangkuti, Y.M dan Side, S. 2013. *"Solusi Numerik Pemodelan Matematika SIR dan SEIR untuk Penularan Demam Berdarah dengan Metode Semi Analitik di Sulawesi Selatan"*. Medan : Laporan Akhir Tahun I Penelitian Fundamental Jurusan Matematika Universitas Negeri Medan.
- [3] Widi, C.A, Nataliani, Y, dan Hendry. 2011. *"Deteksi Dan Prediksi Daerah Endemis Demam Berdarah Dengue (Dbd) Dengan Pemodelan Matematis Susceptible, Infected, Recovered (SIR) (Studi Kasus : Kabupaten Semarang)"*. Semarang : Tugas Akhir Jurusan Teknologi Informasi Aiti.
- [4] Noorani, M.S.M. 2012. *"SEIR Model For Transmission Of Dengue Fever In Selangor Malaysia"*. Selangor : International Journal of Modern Physics. Vol. 9
- [5] Rodrigues, Helena Sofia, Monteiro, M. Teresa T, dan Torres, Delfim F.M. 2013. *"Sensitivity Analysis in a Dengue Epidemiological Model"*. Portugal : Conference Paper.
- [6] Achmadi, F.U. Buletin Jendela Epidemiologi, Volume 2, Agustus 2010 hal 17
- [7] Driessche, P. v., & Wetmough, J. (2002), *"Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission"*, *Mathematical Biosciences*, Vol. 180, hal. 29-48.
- [8] Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2008), *"Differential Equations and Linear Algebra"*, 6th edition, Prentice-Hall, New Jersey.

- [9] Murray, J. D. (2002), "*Mathematical Biology : I. An Introduction*", *Third Edition* . Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg.
- [10] Luknanto, Djoko (2001), "*Bahan kuliah Metoda Numerik Jurusan Teknik Sipil FT UGM*". Yogyakarta. hal.62
- [11] Zhang, X. (2008). "*Backward Bifurcation of an Epidemic Model with Saturated Function*". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol.348.no.1, pp. 433-443

BIODATA PENULIS



Penulis memiliki nama lengkap Desy Kusuma Ningsih atau biasa dipanggil Desy. Penulis dilahirkan dari keluarga sederhana di Sidoarjo pada tanggal 26 Desember tahun 1992. Jenjang pendidikan penulis dimulai dari TK Dharma Wanita pada tahun 1997 s.d 1999 dan dilanjutkan di SDN Mindi I tahun 1999 s.d 2005, SMPN 1 Porong pada tahun 2005 s.d 2008 dan SMAN 1 Krembung pada tahun 2008 s.d 2011. Pada tahun

2011 penulis diterima di jurusan Matematika ITS melalui jalur SNMPTN Undangan dengan NRP 1211100018.

Di jurusan Matematika penulis mengambil bidang minat Matematika Terapan. Untuk mendapatkan informasi yang berhubungan dengan Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke alamat *e-mail*: dskusuma62@gmail.com